FUTURE SCIENCE

MATEMATIKA DISKRIT: TEORI DAN APLIKASINYA

Ida Bagus Kade Puja Arimbawa K., S.Si., M.Si
Ketut Queena Fredlina, S.Si., M.Si

ISBN: 978-621-8438-12-5
PDF 978-621-8438-12-5 (downloadable)

Published by:
FSH-PH Publications
Block 4 Lot 6, Lumina Homes,
Pamatawan, Subic, Zambales

https://fsh-publication.com/

Matematika Diskrit: Teori dan Aplikasinya

Penulis:
Ida Bagus Kade Puja Arimbawa K., S.Si., M.Si.
Ketut Queena Fredlina, S.Si., M.Si.

Editor:
Naqiyah Afifah Mulachelah, S.Si., M.Si.

Desain cover:
Nur indah Ratnasari, S.Si

2025

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga buku “Matematika Diskrit: Teori dan Aplikasinya” ini dapat disusun dan diselesaikan dengan baik. Buku ini disusun sebagai upaya untuk memberikan pemahaman yang sistematis, komprehensif, dan aplikatif mengenai konsep-konsep dasar dalam matematika diskrit yang sangat penting dalam berbagai bidang ilmu.

Matematika diskrit merupakan cabang matematika yang membahas struktur-struktur diskrit, seperti himpunan, relasi, fungsi, logika matematika, teori bilangan, kombinatorika, serta teori graf. Beberapa topik dikembangkan secara aplikatif agar mahasiswa tidak hanya memahami secara teoretis, tetapi juga mampu menerapkan konsep matematika diskrit dalam pemecahan masalah dunia nyata, seperti dalam pemrograman, desain algoritma, kriptografi, pemodelan sistem, dan optimasi.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih memiliki kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran dari para pembaca sangat penulis harapkan demi penyempurnaan buku ini di masa mendatang.

Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penyusunan buku ini, terutama kepada rekan-rekan sejawat, mahasiswa yang telah memberikan umpan balik, serta keluarga yang selalu memberikan doa dan semangat.

Tim Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
LOGIKA MATEMATIKA

1.1 Proposisi

Logika matematika berlandaskan pada konsep proposisi. Proposisi adalah kalimat deklaratif yang memiliki nilai kebenaran, yaitu benar atau salah. Hal yang membedakan proposisi dengan kalimat lainnya adalah kepastian nilai kebenarannya.

Contoh sederhana dapat dilihat pada kalimat “2 adalah bilangan genap.” Kalimat ini jelas bernilai benar. Sebaliknya, kalimat “7 lebih kecil dari 5” merupakan proposisi bernilai salah. Meskipun berbeda nilai kebenarannya, keduanya sama-sama dikategorikan sebagai proposisi. Dengan demikian, baik pernyataan yang bernilai benar maupun pernyataan yang bernilai salah tetap disebut proposisi selama kalimat tersebut memiliki kepastian logis.

Tidak semua kalimat dapat digolongkan sebagai proposisi. Kalimat tanya seperti “Apakah 3 bilangan prima?” bukan merupakan proposisi, karena tidak menyatakan sesuatu yang bisa dipastikan benar atau salah. Kalimat perintah seperti “Kerjakan soal ini!” juga tidak termasuk, sebab tidak ada nilai kebenaran yang terkandung di dalamnya. Begitu pula kalimat seruan, misalnya “Alangkah indahnya pantai ini!” atau kalimat opini “Makanan ini lebih enak daripada makanan itu.” Keduanya tidak bisa ditentukan nilai kebenarannya secara objektif.

Selain proposisi tertutup yang nilainya sudah pasti, terdapat pula kalimat terbuka. **Kalimat terbuka** adalah kalimat yang mengandung variabel, sehingga nilai kebenarannya bergantung pada pengganti variabel tersebut. Misalnya, kalimat “$x > 3$” belum dapat dipastikan benar atau salah sebelum nilai x ditentukan. Jika $x = 5$, kalimat tersebut bernilai benar, tetapi jika $x = 2$, maka bernilai salah. Contoh lain adalah “$n^2 - n$ genap.”

Untuk $n = 3$, diperoleh $3^2 - 3 = 6$, yang merupakan bilangan genap, sehingga bernilai benar. Kalimat terbuka semacam ini akan sangat berguna dalam logika predikat, terutama ketika dikaitkan dengan kuantor universal maupun eksistensial.

Untuk mempermudah analisis, proposisi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti p, q, dan r. Misalkan, p: "2 adalah bilangan prima" dan q: "4 adalah bilangan genap." Bentuk simbolik ini membantu kita bekerja dengan kalimat kompleks secara lebih sederhana dan sistematis.

Contoh proposisi:

1. Setiap bilangan genap dapat dibagi dua → Pernyataan ini benar, karena definisi bilangan genap adalah bilangan bulat yang habis dibagi dua.
2. 25 adalah bilangan prima → Pernyataan ini salah, sebab 25 memiliki faktor selain 1 dan 25, yaitu 5.
3. Pulau Bali terletak di Indonesia → Pernyataan ini benar sesuai fakta geografis.
4. 0 lebih besar dari 1 → Pernyataan ini salah, karena jelas 0 tidak lebih besar dari 1.
5. Jika n bilangan bulat, maka $n^2 \geq 0$ → Pernyataan ini benar, karena kuadrat bilangan bulat selalu tidak negatif.

Kesimpulan: Semua contoh di atas adalah proposisi tertutup karena nilai kebenarannya dapat dipastikan.

Contoh bukan proposisi:

1. Apakah 100 bilangan genap? → Kalimat ini berupa pertanyaan, sehingga bukan proposisi.
2. Tolong tuliskan nama Anda → Kalimat ini adalah perintah, yang tidak dapat diukur benar atau salah.
3. Indah sekali pemandangan ini → Kalimat ini merupakan seruan emosional, bukan proposisi.
4. Kopi lebih enak daripada teh → Kalimat ini adalah opini subjektif, sehingga tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya secara logis.

Kesimpulan: Pertanyaan, perintah, seruan, dan opini subjektif bukanlah proposisi.

Contoh kalimat terbuka:

1. $x + 3 > 10 \rightarrow$ Nilai kebenarannya bergantung pada nilai x. Jika $x = 8$, maka benar, jika $x = 5$, maka salah.
2. n adalah bilangan prima $\rightarrow$ Nilai kebenarannya tergantung pada bilangan n. Jika $n = 7$, maka benar, jika $n = 8$, maka salah.
3. $y^2 - y$ adalah genap → Nilai kebenarannya bergantung pada nilai y. Untuk $y = 3$, diperoleh 6 (benar), untuk $y = 4$, diperoleh 12 (benar). Bahkan dapat ditunjukkan bahwa pernyataan ini selalu benar untuk semua bilangan bulat y.

Kesimpulan: Kalimat terbuka belum memiliki nilai kebenaran pasti sebelum variabelnya ditentukan.

1.2 Operator Logika

Setelah memahami berbagai contoh proposisi, baik yang bernilai benar maupun salah, langkah selanjutnya adalah melihat bagaimana proposisi-proposisi sederhana dapat digabungkan untuk membentuk proposisi baru. Gabungan proposisi ini disebut proposisi majemuk. Untuk menyusun proposisi majemuk digunakan simbol-simbol khusus yang disebut operator logika. Dengan bantuan operator logika, kita dapat mengekspresikan hubungan antara beberapa proposisi sederhana dalam bentuk yang lebih kompleks, namun tetap dapat dianalisis nilai kebenarannya.

1. Negasi ($\sim p$)

Negasi adalah operator logika yang menyatakan kebalikan dari suatu proposisi. Jika suatu proposisi bernilai benar, maka negasinya bernilai salah, dan sebaliknya.

Contoh:

Misalkan p: “7 adalah bilangan prima.”

Maka $\sim p$: “7 bukan bilangan prima.”

Jika p benar, maka $\sim p$ salah.

2. Konjungsi ($p \wedge q$)

Konjungsi adalah operator logika yang menyatakan “dan”. Proposisi $p \wedge q$ bernilai benar hanya jika kedua proposisi p dan q bernilai benar.

Contoh:

Misalkan p: “2 adalah bilangan genap.”

Misalkan q: “3 adalah bilangan ganjil.”

Maka $p \wedge q$: “2 adalah bilangan genap dan 3 adalah bilangan ganjil.”

Karena kedua proposisi benar, maka $p \wedge q$ bernilai benar.

3. Disjungsi

Disjungsi adalah operator logika yang menyatakan “atau”. Dalam kehidupan sehari-hari, kata “atau” bisa memiliki makna berbeda, tergantung konteksnya. Misalnya, “Besok saya akan pergi ke kampus atau ke perpustakaan”, kalimat ini bisa berarti salah satu tempat saja (eksklusif), atau bisa berarti mungkin keduanya (inklusif). Karena itulah, dalam logika dikenal dua macam disjungsi:

a. Disjungsi Inklusif ($p \vee q$)

Proposisi $p \vee q$ bernilai benar jika paling sedikit salah satu dari p atau q bernilai benar.

Contoh:

Misalkan p: “5 adalah bilangan genap.” (salah)

Misalkan q: “5 adalah bilangan ganjil.” (benar)

Maka $p \vee q$: “5 adalah bilangan genap atau 5 adalah bilangan ganjil.”

Karena salah satu benar, maka $p \vee q$ bernilai benar.

b. Disjungsi Eksklusif ($p \oplus q$)

Proposisi $p \oplus q$ bernilai benar hanya jika tepat salah satu dari p atau q bernilai benar.

Contoh:

Misalkan p: “Lampu merah menyala.”

Misalkan q: “Lampu hijau menyala.”

Proposisi $p \oplus q$ berbunyi: “Lampu merah atau hijau menyala, tetapi tidak keduanya sekaligus.”

c. Implikasi ($p \rightarrow q$)

Implikasi adalah operator logika yang menyatakan “jika... maka...”. Proposisi $p \rightarrow q$ bernilai salah hanya dalam satu kasus, yaitu ketika p benar tetapi q salah. Dalam semua keadaan lain, implikasi bernilai benar.

Contoh:

Misalkan p: “Seseorang mahasiswa.”

Misalkan q: “Ia terdaftar di sebuah universitas.”

Proposisi $p \rightarrow q$ berbunyi: “Jika seseorang mahasiswa, maka ia terdaftar di sebuah universitas.”

Proposisi ini masuk akal karena seorang mahasiswa pasti terdaftar di universitas. Namun, jika ada seseorang yang dikatakan mahasiswa (p benar), tetapi ternyata tidak terdaftar di universitas (q salah), maka implikasi ini salah.

d. Biimplikasi ($p \leftrightarrow q$)

Biimplikasi adalah operator logika yang menyatakan “jika dan hanya jika”. Proposisi $p \leftrightarrow q$ bernilai benar jika p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama, baik keduanya benar maupun keduanya salah.

Contoh:

Misalkan p: “Segitiga memiliki tiga sisi.” (benar)

Misalkan q: “Segitiga memiliki jumlah sudut 180°.” (benar)

Maka $p \leftrightarrow q$: “Segitiga memiliki tiga sisi jika dan hanya jika segitiga memiliki jumlah sudut 180°.”

Dalam logika formal, biimplikasi menunjukkan kesetaraan logis antara dua proposisi. Artinya, jika salah satunya benar, maka yang lain juga benar, dan jika salah satunya salah, maka yang lain juga salah.

Operator logika ini menjadi dasar penting dalam analisis logika matematika. Dengan memahami negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi, kita dapat menyusun proposisi majemuk yang lebih kompleks dan melakukan analisis logis yang sistematis. Pada subbab berikutnya, pembahasan akan dilanjutkan dengan tabel kebenaran, yang memberikan cara lebih formal untuk menentukan nilai kebenaran dari setiap proposisi majemuk.

1.3 Tabel Kebenaran

Dalam logika matematika, tabel kebenaran merupakan alat yang digunakan untuk menganalisis nilai kebenaran dari proposisi majemuk. Setiap proposisi majemuk dibentuk dari satu atau lebih proposisi sederhana yang dihubungkan dengan operator logika. Karena setiap proposisi sederhana hanya memiliki dua kemungkinan nilai kebenaran, yaitu benar (B) atau salah (S), maka semua kombinasi kemungkinan ini dapat disajikan secara sistematis dalam bentuk tabel.

Tabel kebenaran memberikan cara yang terstruktur untuk menentukan apakah suatu proposisi majemuk benar atau salah, bergantung pada nilai kebenaran proposisi penyusunnya. Dengan kata lain, tabel kebenaran membantu kita menghindari kesalahan berpikir atau intuisi yang menyesatkan ketika menganalisis argumen logis.

Pentingnya tabel kebenaran tidak hanya terbatas pada logika matematika, tetapi juga meluas ke bidang lain seperti ilmu komputer, elektronika digital, linguistik, bahkan filsafat. Dalam ilmu komputer, misalnya, tabel kebenaran dipakai untuk merancang rangkaian logika. Sementara dalam matematika, tabel kebenaran dipakai untuk memverifikasi validitas argumen, membuktikan teorema, atau menguji konsistensi suatu pernyataan.

Sebagai ilustrasi, jika terdapat satu proposisi sederhana p, maka hanya ada dua kemungkinan nilai kebenaran, yaitu benar (B) atau salah (S). Namun, jika terdapat dua proposisi sederhana

p dan q, maka jumlah kemungkinan kombinasinya bertambah menjadi empat, yakni:

- p benar dan q benar,
- p benar dan q salah,
- p salah dan q benar,
- p salah dan q salah.

Dengan cara ini, tabel kebenaran memuat semua kombinasi secara lengkap, sehingga hasil dari suatu operator logika dapat ditentukan tanpa ada yang terlewat. Dengan pengantar ini, pembahasan selanjutnya akan menunjukkan bentuk tabel kebenaran untuk masing-masing operator logika.

1. Negasi ($\sim p$)

Tabel Kebenaran Negasi

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\sim p}$
B	S
S	B

2. Konjungsi ($p \wedge q$)

Tabel Kebenaran Konjungsi

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

3. Disjungsi ($p \vee q$) dan ($p \oplus q$)

Tabel Kebenaran Disjungsi

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \oplus q}$
B	B	B	S
B	S	B	B
S	B	B	B
S	S	S	S

4. Implikasi ($p \rightarrow q$)

Tabel Kebenaran Implikasi

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

5. Biimplikasi ($p \leftrightarrow q$)

Tabel Kebenaran Biimplikasi

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

1. Diberikan dua proposisi p dan q. Tentukan tabel kebenaran untuk proposisi majemuk $(p \wedge q) \rightarrow \sim p$

Penyelesaian:

Langkah-langkah:

(1) Buat kolom p dan q dengan semua kombinasi nilai kebenarannya.

(2) Tentukan nilai $p \wedge q$.

(3) Tentukan nilai $\sim p$.

(4) Tentukan hasil akhir $(p \wedge q) \rightarrow \sim p$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow \sim p}$
B	B	B	S	S
B	S	S	S	B
S	B	S	B	B
S	S	S	B	B

2. Diberikan dua proposisi p dan q. Tentukan tabel kebenaran untuk proposisi majemuk $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \longrightarrow p)$.

Penyelesaian:

Langkah-langkah:

(1) Buat kolom p dan q dengan semua kombinasi nilai kebenarannya.

(2) Tentukan nilai $p \vee q$.

(3) Tentukan nilai $\sim p$.

(4) Tentukan nilai $\sim q \longrightarrow p$.

(5) Tentukan hasil akhir $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \longrightarrow p)$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{\sim q \rightarrow p}$	$\boldsymbol{(p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \longrightarrow p)}$
B	B	B	S	B	B
B	S	B	B	B	B
S	B	B	S	B	B
S	S	S	B	S	B

Latihan mandiri:

Tentukan tabel kebenaran untuk proposisi majemuk berikut:

1. $\sim p \vee (p \longrightarrow \sim q)$
2. $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim(p \vee q)$

1.4 Kesetaraan Logika

Dalam logika matematika, dua proposisi majemuk dikatakan setara secara logis (*logically equivalent*) apabila keduanya memiliki nilai kebenaran yang sama untuk setiap kemungkinan nilai kebenaran dari proposisi-proposisi sederhana yang menyusunnya. Kesetaraan logis biasanya ditulis dengan simbol:

$$p \equiv q$$

atau dengan tanda biimplikasi:

$p \leftrightarrow q$ selalu benar.

Artinya, meskipun bentuk proposisinya berbeda, keduanya tidak dapat dibedakan dari sisi nilai kebenaran. Konsep ini sangat penting dalam logika, karena banyak proposisi dapat disederhanakan menggunakan aturan kesetaraan logika.

Untuk memudahkan proses penyederhanaan, para ahli logika merumuskan sejumlah hukum logika. Hukum-hukum ini merupakan aturan dasar yang digunakan untuk mengubah suatu proposisi menjadi proposisi lain yang setara.

1.4.1 Hukum-hukum Kesetaraan Logika

Hukum Identitas:

- $p \wedge B \equiv p$
- $p \vee S \equiv p$

Hukum null/dominasi

- $p \wedge S \Leftrightarrow S$
- $p \vee B \Leftrightarrow B$

Hukum negasi

- $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow B$
- $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow S$

Hukum Negasi Ganda:

$\sim({\sim}p) \equiv p$

Hukum Idempoten:

- $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee p \equiv p$

Hukum Komutatif:

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$

Hukum Asosiatif:

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Hukum Distributif:

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Hukum De Morgan:

- $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Hukum Implikasi:

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Contoh Kesetaraan Logika

Contoh 1: Implikasi dan Disjungsi

Buktikan bahwa $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{\sim p \vee q}$
B	B	B	S	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

Contoh 2: Hukum De Morgan

Buktikan bahwa $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{\sim(p \vee q)}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{\sim p \wedge \sim q}$
B	B	B	S	S	S	S
B	S	B	S	S	B	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	S	B	B	B	B

Contoh 3: Idempoten

Buktikan bahwa $p \wedge p \equiv p$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p \wedge p}$
B	B
S	S

1.5 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Dalam logika proposisional, setiap proposisi majemuk dapat dikategorikan berdasarkan sifat nilai kebenarannya. Ada proposisi yang selalu benar, ada yang selalu salah, dan ada juga yang kebenarannya bergantung pada kondisi. Tiga sifat ini dikenal dengan istilah tautologi, kontradiksi, dan kontingensi. Pemahaman terhadap sifat ini penting karena menjadi dasar dalam menilai validitas argumen logis, serta dalam menyederhanakan bentuk proposisi.

1.5.1 Tautologi

Tautologi adalah proposisi majemuk yang selalu bernilai benar dalam setiap kemungkinan kombinasi nilai kebenaran proposisi-proposisi penyusunnya. Dengan kata lain, tidak ada satupun kondisi yang membuat tautologi bernilai salah. Tautologi merepresentasikan suatu pernyataan yang tidak dapat disangkal kebenarannya. Dalam konteks logika, tautologi sering dipakai untuk menunjukkan argumen yang valid, karena sebuah argumen dikatakan valid jika implikasinya merupakan tautologi. Contoh tautologi adalah $(p \vee \sim p)$, yang selalu bernilai benar.

1.5.2 Kontradiksi

Kontradiksi adalah proposisi majemuk yang selalu bernilai salah untuk semua kombinasi nilai kebenaran proposisi penyusunnya. Kontradiksi menggambarkan pernyataan yang mustahil benar, karena mengandung pertentangan internal. Dalam logika, kontradiksi sering menunjukkan kesalahan penalaran atau argumen yang tidak konsisten. Contoh kontradiksi adalah $(p \wedge \sim p)$, yang selalu salah karena itu adalah konjungsi antara proposisi p dan negasi p.

1.5.3 Kontingensi

Kontingensi adalah proposisi majemuk yang tidak selalu benar dan tidak selalu salah. Artinya, ada kondisi proposisi tersebut benar, dan ada kondisi proposisi tersebut salah. Kontingensi adalah proposisi yang kebenarannya bergantung pada nilai proposisi sederhana. Hampir semua proposisi dalam kehidupan nyata termasuk kontingensi, karena tidak selalu berlaku mutlak. Contoh kontingensi adalah $p \vee q$, yang nilai kebenaran bergantung pada nilai kebenaran p dan q.

Contoh:

Periksa apakah proposisi berikut merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingensi.

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$

Penyelesaian:

Dengan tabel kebenaran:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{q \to p}$	$\boldsymbol{(p \to q) \vee (q \to p)}$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	B	S	B
S	S	B	B	B

Karena nilai kebenaran untuk seluruh kemungkinan adalah benar, maka proposisi di atas merupakan tautologi.

2. $(p \vee q) \wedge {\sim}(p \vee q)$

Dengan tabel kebenaran:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{\sim(p \vee q)}$	$\boldsymbol{(p \vee q) \wedge \sim(p \vee q)}$
B	B	B	S	S
B	S	B	S	S
S	B	B	S	S
S	S	S	B	S

Karena nilai kebenaran untuk seluruh kemungkinan adalah salah, maka proposisi di atas merupakan kontradiksi.

3. $(p \to q) \wedge (p \to {\sim}q)$

Penyelesaian:

Dengan tabel kebenaran:

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \to \sim q$	$(p \to q) \land (p \to \sim q)$
B	B	B	S	S	S
B	S	S	B	B	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

Karena nilai kebenaran untuk seluruh kemungkinan adalah benar dan juga salah, maka proposisi di atas merupakan kontingensi.

1.6 Implikasi dan Bentuknya

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya, implikasi adalah proposisi majemuk berbentuk $p \to q$ yang dibaca *"jika p, maka q".* Implikasi merupakan salah satu bentuk pernyataan logis yang paling penting dalam logika matematika. Hal ini disebabkan karena hampir semua teorema, definisi, maupun proposisi dalam matematika dituliskan dalam bentuk implikasi. Suatu pernyataan seperti "Jika suatu bilangan genap, maka kuadrat bilangan tersebut habis dibagi 4" adalah contoh nyata bagaimana implikasi dipakai untuk merumuskan hubungan antara dua kondisi logis. Dengan demikian, implikasi bukan hanya sekadar bentuk abstrak, tetapi juga memiliki peranan langsung dalam penyusunan argumen matematis yang sahih.

Dari satu implikasi dasar, kita dapat membentuk tiga variasi lain yang masih berhubungan, yaitu **konvers**, **invers**, dan **kontraposisi**. Masing-masing bentuk ini memiliki struktur, arti, dan hubungan kebenaran yang berbeda dengan implikasi asal. Konvers dan invers menunjukkan bagaimana perubahan posisi atau negasi dapat memengaruhi makna suatu pernyataan, sementara kontraposisi justru menunjukkan kesetaraan logis dengan implikasi semula. Pemahaman yang cermat terhadap ketiga bentuk ini sangat penting agar kita tidak keliru dalam menganalisis suatu pernyataan ataupun ketika membuktikan teorema.

1. Konvers (*Converse*)

Konvers dari sebuah implikasi $p \rightarrow q$ adalah proposisi baru berbentuk $q \rightarrow p$. Dengan kata lain, konvers diperoleh dengan menukar posisi *antecedent* (p) dan c*onsequent* (q). Konvers menanyakan apakah hubungan logis yang berlaku satu arah juga berlaku pada arah sebaliknya. Namun, konvers tidak selalu setara dengan implikasi asal. Konvers membantu mengecek hubungan timbal balik, tetapi tidak bisa dipakai sebagai pengganti implikasi.

Contoh:

Implikasi awal	: Jika bilangan habis dibagi 4, maka bilangan tersebut genap. (benar)
Konvers	: Jika bilangan genap, maka bilangan tersebut habis dibagi 4. (salah, karena 6 adalah bilangan genap, tetapi tidak habis dibagi 4)

2. Invers (*Inverse*)

Invers dari sebuah implikasi $p \rightarrow q$ adalah proposisi baru berbentuk $\sim p \rightarrow \sim q$. Invers diperoleh dengan menegasikan *antecedent* dan *consequent*, tanpa menukar posisinya. Invers menyatakan bentuk penyangkalan dari implikasi asal. Namun, invers juga tidak selalu setara dengan implikasi asal. Invers sering digunakan untuk menganalisis pernyataan penyangkalan, tetapi tidak bisa dianggap ekuivalen dengan implikasi asli.

Contoh:

Implikasi awal	: Jika hari hujan, maka jalanan basah. (umumnya benar)
Invers	: Jika hari tidak hujan, maka jalanan tidak basah. (salah, karena jalanan bisa basah karena alasan lain, misalnya disiram)

3. Kontraposisi (*Contrapositive*)

Kontraposisi dari sebuah implikasi $p \rightarrow q$ adalah proposisi baru berbentuk $q \rightarrow p$. Kontraposisi diperoleh dengan menukar *antecedent* dan *consequent* sekaligus menegasikan keduanya.

Berbeda dengan konvers dan invers, kontraposisi selalu setara dengan implikasi asal. Dalam pembuktian matematika, kontraposisi sering digunakan sebagai alternatif pembuktian tidak langsung. Misalnya, untuk membuktikan $p \to q$, sering kali lebih mudah menunjukkan bahwa $\sim q \to \sim p$.

Contoh:

Implikasi awal	: Jika suatu segitiga sama sisi, maka segitiga tersebut sama panjang sisinya. (benar)
Kontraposisi	: Jika suatu segitiga tidak sama panjang sisinya, maka segitiga tersebut bukan segitiga sama sisi. (benar)

Kesimpulan:

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa:

- Konvers $(q \to p)$ tidak selalu ekuivalen dengan implikasi $p \to q$.
- Invers $(\sim p \to \sim q)$ juga tidak selalu ekuivalen dengan implikasi $p \to q$.
- Kontraposisi $(\sim q \to \sim p)$ selalu ekuivalen dengan implikasi $p \to q$.

Pemahaman bentuk-bentuk implikasi ini sangat berguna dalam analisis logika dan pembuktian matematika, terutama karena kontraposisi sering digunakan sebagai metode pembuktian tidak langsung.

1.7 Kuantor-kuantor dalam Logika Predikat

Dalam logika proposisional, setiap proposisi selalu memiliki nilai kebenaran yang jelas, yaitu benar atau salah. Namun, keterbatasan logika proposisional adalah bahwa ia hanya mampu menangani proposisi yang spesifik, tanpa melibatkan variabel yang mewakili himpunan objek. Untuk menganalisis pernyataan yang melibatkan variabel, seperti “x adalah bilangan prima” atau “x lebih besar dari 5,” diperlukan pendekatan yang lebih umum. Inilah yang menjadi dasar lahirnya logika predikat.

Dalam logika predikat, sebuah kalimat logis dapat mengandung predikat dan variabel. Nilai kebenarannya tidak dapat ditentukan sebelum variabel tersebut diberikan nilai tertentu. Misalnya, pernyataan "$x > 3$" dapat bernilai benar jika $x = 5$, tetapi salah jika $x = 2$. Kalimat semacam ini disebut proposisi terbuka. Untuk mengubah proposisi terbuka menjadi proposisi tertutup (yang bernilai benar atau salah), digunakanlah kuantor.

Kuantor adalah simbol khusus yang menyatakan ruang lingkup variabel, yang menentukan apakah berlaku untuk semua anggota himpunan atau hanya untuk sebagian anggota saja. Dengan kuantor, pernyataan matematika dapat dirumuskan secara formal, jelas, dan tidak menimbulkan ambiguitas.

1.7.1 Kuantor Universal (∀)

Kuantor universal dinyatakan dengan simbol ∀, yang berarti "untuk semua" atau "untuk setiap." Jika $P(x)$ adalah sebuah predikat, maka proposisi $\forall x\, P(x)$ dibaca "untuk setiap x, berlaku $P(x)$." Pernyataan ini menegaskan bahwa predikat yang diberikan berlaku secara umum tanpa pengecualian.

Secara formal, pernyataan $\forall x\, P(x)$ benar hanya jika $P(x)$ bernilai benar untuk setiap elemen x dalam domain pembicaraan. Sebaliknya, jika ada satu saja elemen x yang membuat $P(x)$ salah, maka seluruh pernyataan $\forall x\, P(x)$ menjadi salah. Dengan demikian, kuantor universal menekankan sifat keumuman dan memastikan bahwa suatu kondisi berlaku di semua kasus yang mungkin. Artinya, kebenaran kuantor universal rapuh terhadap pengecualian: cukup ada satu contoh kontra (*counterexample)* untuk membantah kebenarannya.

Contoh:

- $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$ → benar, karena kuadrat setiap bilangan bulat memang tidak pernah negatif.
- $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ genap → salah, karena terdapat bilangan bulat ganjil seperti 1, 3, dan 5.

Kuantor universal sering muncul dalam pernyataan teorema yang sifatnya berlaku umum, misalnya “Untuk setiap bilangan prima $p > 2$, maka p adalah bilangan ganjil.”

1.7.2 Kuantor Eksistensial (∃)

Kuantor eksistensial dinyatakan dengan simbol ∃, yang berarti *“ada”* atau “setidaknya satu.” Jika $P(x)$ adalah sebuah predikat, maka proposisi $\exists x\, P(x)$ dibaca “ada x, sehingga berlaku $P(x)$.” Pernyataan ini menegaskan keberadaan minimal satu elemen dalam domain yang memenuhi kondisi yang ditentukan.

Secara formal, $\exists x\, P(x)$ benar jika terdapat paling sedikit satu nilai x dalam domain pembicaraan yang membuat $P(x)$ benar. Pernyataan ini salah hanya jika tidak ada satupun elemen yang memenuhi syarat tersebut. Kuantor eksistensial sangat berguna untuk menegaskan keberadaan contoh spesifik dalam suatu pembuktian atau argumen.

Contoh:

- $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 25 \rightarrow$ benar, karena terdapat bilangan bulat $x = 5$ yang memenuhi syarat tersebut.
- $\exists x \in \mathbb{N}, x < 0 \rightarrow$ salah, karena himpunan bilangan asli tidak memuat bilangan negatif.

Kuantor eksistensial sering dipakai untuk menunjukkan *counterexample* atau eksistensi tertentu dalam teorema, misalnya “Ada bilangan prima yang merupakan bilangan genap.” Pernyataan ini benar karena bilangan 2 memenuhi syarat tersebut.

1.7.3 Perbedaan Kuantor Universal dan Eksistensial

Kuantor universal dan kuantor eksistensial memiliki perbedaan yang mendasar. Kuantor universal menekankan keumuman dengan menuntut bahwa predikat berlaku untuk semua elemen dalam domain. Sebaliknya, kuantor eksistensial menekankan keberadaan minimal satu elemen yang memenuhi predikat tersebut.

Meskipun keduanya sama-sama dipakai untuk mengikat variabel dalam logika predikat, kuantor universal dan eksistensial memiliki perbedaan yang mendasar:

1. Ruang lingkup kebenaran
    - Kuantor universal (∀) menuntut seluruh elemen dalam domain memenuhi predikat.
    - Kuantor eksistensial (∃) hanya menuntut minimal satu elemen dalam domain memenuhi predikat.
2. Kerapuhan dan kekuatan
    - Kuantor universal sangat rapuh, karena cukup satu contoh kontra membuatnya salah.
    - Kuantor eksistensial sangat kuat, karena cukup satu bukti keberadaan sudah cukup untuk menyatakannya benar.
3. Arah penalaran
    - Kuantor universal mendukung pembuktian umum (*general proof*).
    - Kuantor eksistensial lebih cocok digunakan untuk membuktikan keberadaan (*existence proof*).

Dengan kata lain:

$\forall x\, P(x)$ → semua elemen domain memenuhi $P(x)$.

$\exists x\, P(x)$ → ada minimal satu elemen domain yang memenuhi $P(x)$.

Contoh perbandingan:

- $\forall x \in \mathbb{N}, x > 0$ → benar, karena setiap bilangan asli lebih dari 0.
- $\exists x \in \mathbb{N}$, x genap → benar, karena terdapat bilangan asli genap, misalnya 2.
- Namun, $\forall x \in \mathbb{N}$, x genap → Salah, karena banyak bilangan asli yang ganjil.

1.7.4 Negasi Kuantor

Negasi kuantor adalah salah satu aspek penting dalam logika predikat, karena sering digunakan dalam proses pembuktian maupun penyusunan argumen yang lebih kompleks.

Dengan memahami cara menegasikan pernyataan yang mengandung kuantor, kita dapat menyusun pernyataan yang ekuivalen secara logis, tetapi dalam bentuk yang lebih mudah untuk dianalisis atau dibuktikan.

1. Negasi Kuantor Universal

Bentuk umum kuantor universal adalah $\forall x\, P(x)$. Jika dinyatakan negasinya, maka berlaku:

$$\sim\big(\forall x\, P(x)\big) \equiv\ \exists x \sim P(x)$$

Artinya, "tidak benar bahwa untuk semua x berlaku $P(x)$" setara dengan "ada x yang tidak memenuhi $P(x)$."

Makna: Jika pernyataan universal salah, berarti ada minimal satu contoh yang bisa membantahnya. Oleh karena itu, untuk membuktikan salahnya pernyataan dengan kuantor universal, cukup memberikan *counterexample*.

Contoh:

Pernyataan: ∀x ∈ ℕ, x adalah bilangan genap.

Negasi: ∃x ∈ ℕ, x bukan bilangan genap (yaitu ada bilangan ganjil).

Cukup tunjukkan x = 3, maka pernyataan universal menjadi salah.

2. Negasi Kuantor Eksistensial

Bentuk umum kuantor eksistensial adalah $\exists x\, P(x)$. Jika dinyatakan negasinya, maka berlaku:

$$\sim\big(\exists x\, P(x)\big) \equiv\ \forall x \sim P(x)$$

Artinya, "tidak benar bahwa ada x yang memenuhi $P(x)$" setara dengan "untuk setiap x, tidak berlaku $P(x)$."

Makna: Jika pernyataan eksistensial salah, maka predikat tersebut gagal untuk semua elemen domain. Dengan kata lain, tidak ada satupun contoh yang bisa dijadikan bukti keberadaan.

Contoh:

Pernyataan: $\exists x \in \mathbb{N}, x < 0$.

Negasi: $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$.

Karena memang setiap bilangan asli tidak pernah negatif, maka pernyataan eksistensial salah dan negasinya benar.

3. Prinsip Umum Negasi Kuantor

Dari kedua aturan di atas, kita dapat menyusun prinsip umum:

- Menegasikan kuantor universal (∀) akan mengubahnya menjadi kuantor eksistensial (∃) dengan predikat yang dinegasikan.
- Menegasikan kuantor eksistensial (∃) akan mengubahnya menjadi kuantor universal (∀) dengan predikat yang dinegasikan.

Secara simbolik:

$$\sim\left(\forall x\, P(x)\right) \equiv \exists x \sim P(x)$$
$$\sim\left(\exists x\, P(x)\right) \equiv \forall x \sim P(x)$$

4. Aplikasi dalam Pembuktian

Negasi kuantor sangat berguna dalam pembuktian matematika, terutama pada:

a. Pembuktian dengan kontraposisi dan kontradiksi. Untuk membuktikan salahnya suatu pernyataan universal, cukup memberikan contoh kontra.
b. Logika formal dalam pemrograman dan basis data. Negasi kuantor digunakan dalam *query* logis, misalnya: “tidak semua mahasiswa lulus ujian” setara dengan “ada mahasiswa yang tidak lulus ujian.”

c. Matematika formal. Dalam teori himpunan atau teori bilangan, negasi kuantor membantu menyusun bentuk logis pernyataan yang lebih ringkas.

Kuantor adalah sarana penting dalam logika predikat yang memungkinkan proposisi terbuka berubah menjadi proposisi tertutup dengan nilai kebenaran yang jelas. Kuantor universal (∀) menyatakan bahwa suatu kondisi berlaku untuk semua elemen dalam domain, sedangkan kuantor eksistensial (∃) menyatakan bahwa ada setidaknya satu elemen dalam domain yang memenuhi kondisi tersebut. Negasi kuantor menunjukkan keterkaitan yang saling berlawanan antara universal dan eksistensial. Dengan memahami penggunaan kuantor, kita dapat menuliskan pernyataan matematika secara lebih formal, konsisten, dan sistematis, serta menggunakannya sebagai dasar dalam pembuktian logika maupun teorema matematika.

BAB 2
HIMPUNAN

2.1 Pengantar Konsep Himpunan

Dalam matematika, himpunan merujuk pada kumpulan objek yang terdefinisi secara jelas, dan setiap objek dalam himpunan tersebut disebut sebagai elemen. Konsep ini memainkan peran mendasar dalam berbagai cabang ilmu, mulai dari matematika murni hingga ilmu komputer, karena memberikan kerangka formal untuk menyusun dan memanipulasi koleksi objek.

Salah satu karakteristik penting dari himpunan adalah bahwa identitas elemen ditentukan tanpa memperhatikan urutan atau pengulangan. Sebagai contoh, himpunan $\{1,2,3\}$, $\{3,2,1\}$, dan $\{1,2,2,3\}$ dianggap sebagai himpunan yang sama karena hanya memuat elemen 1, 2, dan 3, meskipun ditulis dalam urutan atau frekuensi yang berbeda.

Dalam kehidupan sehari-hari dan dalam dunia sains, himpunan digunakan secara implisit, misalnya: daftar peserta ujian, koleksi file dalam folder, atau sekumpulan node dalam jaringan komputer. Dalam bidang informatika, himpunan digunakan dalam struktur data seperti Set, dalam *query basis data* (SQL), serta dalam pemrograman logika dan teori himpunan fuzzy.

Contoh:

1. Himpunan huruf vokal dalam alfabet Latin: $V = \{a, e, i, o, u\}$
2. Himpunan bilangan prima kurang dari 10: $P = \{2,3,5,7\}$

Kekuatan konsep himpunan terletak pada kemampuannya untuk menyederhanakan dan menyatukan berbagai struktur matematika. Relasi, fungsi, graf, dan struktur aljabar semuanya dapat didefinisikan secara formal dengan himpunan. Oleh karena itu, pemahaman tentang himpunan menjadi syarat dasar sebelum mempelajari struktur diskrit lainnya.

Konsep modern mengenai himpunan dikembangkan oleh George Cantor pada akhir abad ke-19. Ia tidak hanya menyusun dasar teori himpunan, tetapi juga memperkenalkan ide revolusioner mengenai himpunan tak hingga dan konsep kardinalitas, yang hingga kini menjadi bagian penting dalam logika matematika dan teori bilangan.

Referensi

- Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
- Epp, S. S. (2011). *Discrete Mathematics with Applications* (4th ed.). Cengage Learning.
- Cantor, G. (1895). *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. *Mathematische Annalen*.
- Grimaldi, R. P. (2004). *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction* (5th ed.). Pearson Education.

2.2. Notasi dan Cara Menyatakan Himpunan

2.2.1. Cara Menyatakan Himpunan

Untuk menyatakan suatu himpunan secara formal, terdapat beberapa metode notasi yang umum digunakan dalam matematika. Pemilihan notasi bergantung pada konteks, kompleksitas elemen, serta tujuan representasi. Berikut adalah tiga cara utama untuk menyatakan himpunan:

A. Notasi Daftar (*Roster Notation*)

Dalam notasi ini, semua elemen himpunan dicantumkan satu per satu, dipisahkan oleh koma, dan diletakkan di dalam kurung kurawal. Metode ini cocok untuk himpunan yang memiliki jumlah elemen terbatas.

Contoh:

Himpunan bilangan ganjil kurang dari 10 dapat dituliskan sebagai:

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$

B. Notasi Pembentuk Himpunan (*Set-builder Notation*)

Notasi ini menyatakan himpunan berdasarkan sifat atau kondisi yang harus dipenuhi oleh anggotanya. Biasanya menggunakan variabel, tanda "|" (atau ":"), dan keterangan syarat.

Contoh:

Himpunan bilangan genap kurang dari 10:

$$B = \{x \mid x\ bilangan\ genap,\ 0 \leq x < 10\}$$

Artinya, "himpunan semua *x* sedemikian hingga *x* adalah bilangan genap dan *x* kurang dari 10". Notasi ini sangat berguna untuk menyatakan himpunan tak hingga, atau ketika sifat elemen lebih penting daripada daftarnya.

C. Notasi Deskriptif

Notasi ini digunakan dalam konteks informal atau untuk menjelaskan himpunan dalam bentuk kalimat atau frasa.

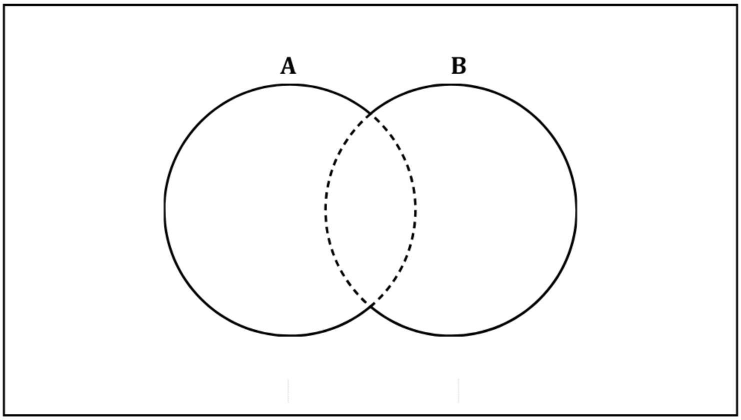
Contoh:

"Himpunan semua huruf vokal dalam alfabet Latin."

Meskipun tidak selalu dipakai dalam perhitungan formal, notasi ini banyak digunakan dalam komunikasi verbal dan ilustrasi awal konsep.

D. Diagram venn

Diagram Venn adalah representasi grafis yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antarhimpunan dan hasil operasi-operasi dasar seperti gabungan, irisan, selisih, dan komplemen. Diagram ini pertama kali diperkenalkan oleh John Venn pada tahun 1880 untuk mengilustrasikan silogisme logika, dan sejak saat itu telah menjadi alat visual yang sangat penting dalam matematika, statistika, dan ilmu komputer.



Gambar 2.1. Diagram Venn

2.2.2. Keanggotaan Himpunan

Hubungan antara suatu elemen dengan suatu himpunan dinyatakan melalui simbol:

$x \in A$: dibaca “x anggota A” — artinya x adalah elemen dalam himpunan A.

$x \notin A$: dibaca “x bukan anggota A” — artinya x tidak termasuk dalam himpunan A.

Contoh:

Jika $A = \{1,3,5,7\}$ maka:

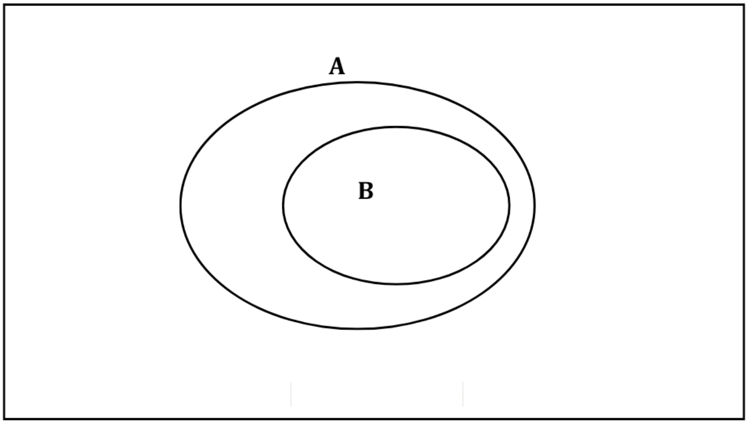
- $3 \in A$, karena 3 terdapat dalam himpunan A.
- $4 \notin A$, karena 4 tidak termasuk dalam himpunan A.

2.2.3. Subhimpunan

Dalam teori himpunan, konsep subhimpunan (subset) merupakan dasar penting yang menggambarkan hubungan inklusi antara dua himpunan. Jika setiap elemen dari suatu himpunan A juga merupakan elemen dari himpunan B, maka A disebut **subhimpunan dari** B. Hubungan ini dinyatakan dengan simbol:

$$A \subseteq B$$

Artinya, untuk setiap x, jika $x \in A$, maka $x \in B$.



Gambar 2.2. Subhimpunan

Contoh:

$$A = \{1,2\}, \qquad B = \{1,2,3,4\}$$

Karena semua elemen A juga berada dalam B, maka: $A \subseteq B$

Jenis – jenis Subhimpunan

1. Subhimpunan Biasa ($\subseteq$): Himpunan A dapat sama dengan B, sehingga $A \subseteq B$ mencakup kemungkinan bahwa $A = B$.
2. Subhimpunan Sejati (*Proper Subset*, $\subset$): Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$ maka A disebut subhimpunan sejati dari B. Dalam hal ini, ada setidaknya satu elemen di B yang tidak ada di A. Contoh: $C = \{1,2\},\ D = \{1,2,3\} \Rightarrow C \subset D$.

2.3. Jenis dan sifat – sifat himpunan

2.3.1. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Simbol yang digunakan untuk menyatakan himpunan kosong adalah:

$$\emptyset \text{ atau } \{\}$$

Contoh: $A = \{x \in N \mid x < 0\} = \emptyset$

Sifat penting:

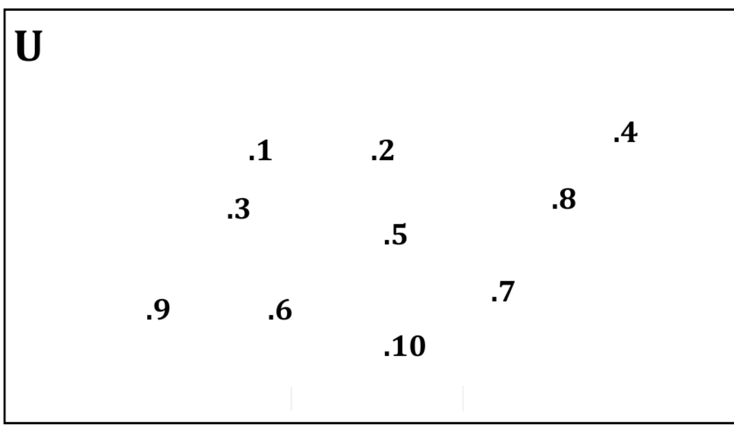
- Himpunan kosong adalah subhimpunan dari semua himpunan $\emptyset \subseteq A$ untuk setiap himpunan A;
- Himpunan kosong tidak memiliki elemen, atau jumlah anggotanya adalah nol.

2.3.2. Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah himpunan yang mencakup seluruh elemen yang sedang menjadi ruang pembicaraan. Biasanya dinotasikan dengan simbol U atau S.

Contoh:

Jika konteksnya adalah bilangan asli dari 1 sampai 10, maka: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.



Gambar 2.3. Himpunan Semesta

Himpunan semesta diperlukan dalam definisi komplemen himpunan, yaitu himpunan semua elemen dalam U yang tidak ada dalam himpunan tertentu.

2.3.3 Himpunan yang sama

Dua himpunan dikatakan sama jika keduanya mengandung elemen yang identik, tanpa memperhatikan urutan penulisannya. Secara formal:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Contoh: $A = \{x, y, z\}, B = \{z, x, y\} \Rightarrow A = B$

2.3.4. Himpunan yang ekuivalen

Dua himpunan dikatakan ekuivalen apabila jumlah elemen keduanya sama, walaupun elemen-elemen tersebut berbeda. Notasi yang digunakan:

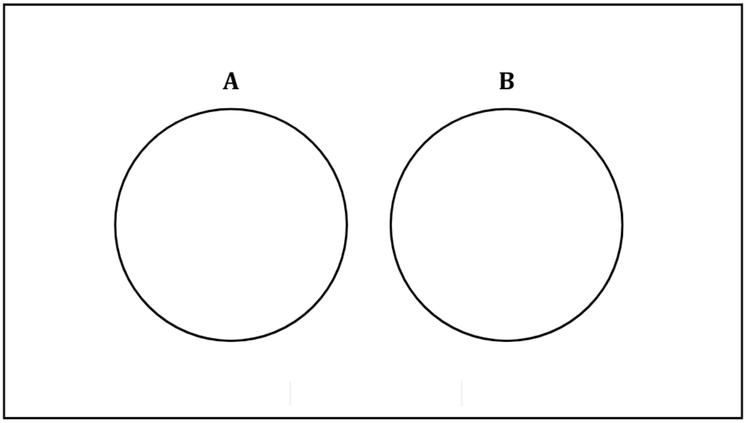
$$A \sim B$$

Contoh: $A = \{kucing, anjing\}, B = \{1,2\} \Rightarrow A \sim B$

Meskipun nama elemen berbeda, kedua himpunan tersebut memiliki dua anggota, sehingga dianggap ekuivalen.

2.3.5 Himpunan saling lepas

Dua himpunan dikatakan saling lepas (*disjoint sets*) apabila tidak memiliki elemen yang sama. Artinya, irisan dari kedua himpunan tersebut adalah himpunan kosong. Secara formal, jika A dan B adalah dua himpunan yang saling lepas, maka tidak ada satu pun elemen yang menjadi anggota dari kedua himpunan tersebut secara bersamaan.



Gambar 2.4. Himpunan saling lepas

Contoh:

$\mathrm{A} = \{1,3,5\}$ dan $\mathrm{B} = \{2,4,6\}$. Tidak ada anggota himpunan A yang sama di himpunan B, begitu juga sebaliknya.

2.4. Operasi Himpunan

Operasi pada himpunan digunakan untuk membentuk himpunan baru dari satu atau lebih himpunan yang telah ada.

Operasi-operasi ini merupakan dasar dalam pembentukan struktur matematis yang lebih kompleks, dan juga banyak digunakan dalam logika, basis data, dan algoritma.

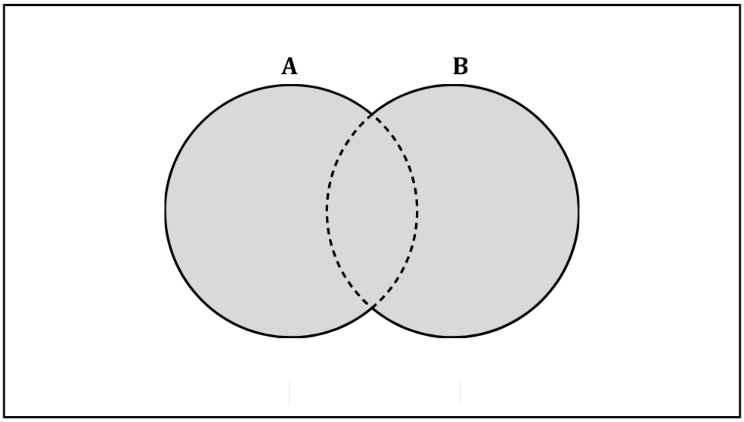
2.4.1 Gabungan Himpunan (Union)

Gabungan dua himpunan adalah operasi yang menghasilkan himpunan baru yang berisi semua elemen yang terdapat dalam setidaknya satu dari kedua himpunan tersebut. Dengan kata lain, setiap elemen yang ada di himpunan pertama, himpunan kedua, atau keduanya, akan termasuk dalam hasil gabungan.

Gabungan dari himpunan A dan B dituliskan sebagai:

$$\boldsymbol{A \cup B = \{\, x \mid x \in A \; atau \; x \in B \,\}}$$

Kata "atau" dalam definisi di atas bersifat inklusif, artinya elemen yang berada di keduanya sekaligus juga tetap termasuk dalam gabungan.



Gambar 2.5. Diagram Venn Gabungan himpunan

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$. Tentukan $A \cup B$.

Penyelesaian:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. Perhatikan bahwa elemen 3, meskipun muncul di kedua himpunan, hanya dituliskan sekali dalam gabungan, karena setiap elemen dalam himpunan bersifat unik (tidak boleh berulang).

Contoh 2 (Soal cerita):

Dalam suatu kelas, terdapat:

- 30 siswa yang menyukai bola voli.
- 25 siswa yang menyukai bola basket.
- 12 siswa yang menyukai keduanya.

Berapa banyak siswa yang menyukai setidaknya salah satu dari kedua olahraga tersebut?

Penyelesaian:

$$|\, Voli \cup Basket \,| = 30 + 25 - 12 = 43$$

Catatan penting

- Jika A dan B saling lepas (tidak ada elemen yang sama), maka: $A \cup B = A \cup B$ adalah penggabungan semua elemen secara langsung.
- Gabungan tidak memperhatikan urutan atau pengulangan, karena himpunan bersifat tidak terurut dan unik.

Latihan mandiri:

1. Diketahui $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}, \mathrm{B} = \{\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}\}$. Tentukan $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
2. Jika $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1,2,3,4,5,6\}$, dan $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$, berapa elemen minimum yang mungkin dimiliki B?
3. Dalam suatu survei, 40 orang suka kopi, 35 orang suka teh, dan 15 orang suka keduanya. Berapa banyak orang yang suka minimal salah satu dari keduanya?

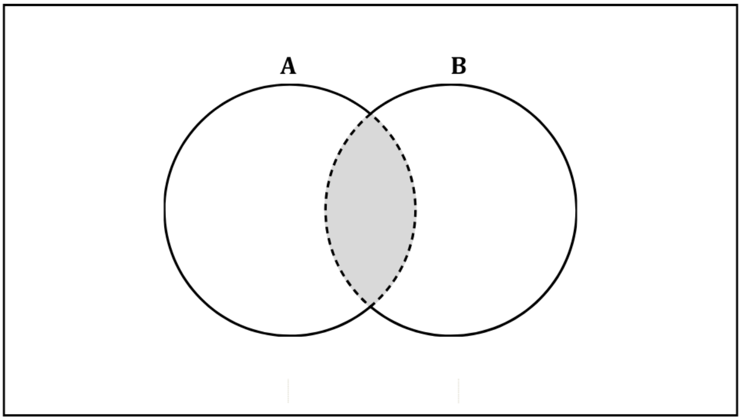
2.4.2 Irisan Himpunan (Intersection)

Irisan dua himpunan adalah operasi yang menghasilkan sebuah himpunan baru yang terdiri dari elemen-elemen yang terdapat pada kedua himpunan tersebut secara bersamaan.

Dengan kata lain, hanya elemen yang menjadi anggota dari kedua himpunan yang akan muncul dalam hasil irisan.

Secara matematis, jika A dan B adalah dua himpunan, maka irisan A dan B, dituliskan sebagai:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A \ dan \ x \in B\}}$$



Gambar 2.6. Diagram Venn Irisan Himpunan

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$. Tentukan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Penyelesaian:

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{3,4\}$. Elemen 3 dan 4 terdapat pada kedua himpunan, sedangkan elemen lainnya hanya muncul pada salah satu himpunan.

Contoh 2 (Soal cerita):

Dalam sebuah kelas terdapat:

- 18 siswa suka pelajaran Matematika.
- 14 siswa suka pelajaran Fisika.
- 6 siswa suka keduanya.

Berapa siswa yang suka Matematika dan Fisika?

Penyelesaian:

Karena irisan menyatakan jumlah siswa yang menyukai keduanya, maka: $|\mathrm{M} \cap \mathrm{F}| = 6$.

Contoh 3:

Jika $\mathrm{A} = \{2,4,6,8\}$ dan $\mathrm{B} = \{1,3,5,7\}$, maka tentukan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Penyelesaian:

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ karena tidak ada elemen yang sama/saling lepas.

Latihan mandiri:

1. Jika $\mathrm{A} = \{1,3,5,7\}$ dan $\mathrm{B} = \{5,6,7,8\}$, tentukan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.
2. Tentukan irisan dari tiga himpunan berikut:
   $\mathrm{A} = \{2,4,6,8\}$, $\mathrm{B} = \{4,5,6\}$, $\mathrm{C} = \{0,4,6,9\}$
3. Dalam suatu survei:
   - 45 orang suka kopi.
   - 35 orang suka teh.
   - 20 orang suka keduanya.

Berapa orang yang termasuk dalam irisan kedua kelompok?

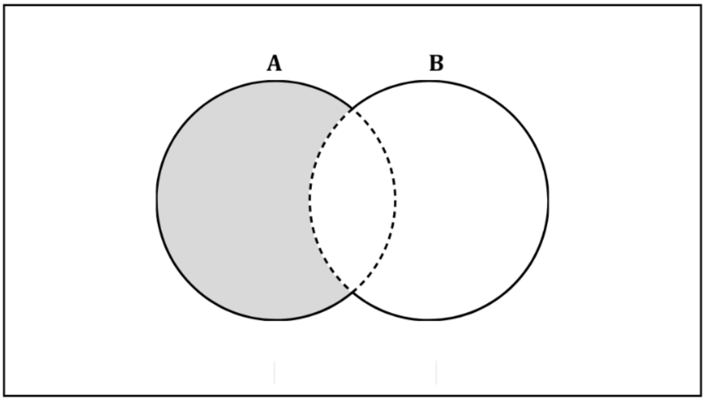
2.4.3 Selisih Himpunan (Difference)

Selisih himpunan adalah operasi yang menghasilkan sebuah himpunan baru yang berisi elemen-elemen yang terdapat dalam satu himpunan tetapi tidak terdapat dalam himpunan lainnya. Selisih biasanya dihitung dari satu arah, sehingga operasi ini tidak komutatif.

Secara formal, selisih dari himpunan A terhadap himpunan B dituliskan:

$$\boldsymbol{A - B = \{x \mid x \in A \; dan \; x \notin B\}}$$

Dengan kata lain, hasil dari $A - B$ adalah himpunan yang memuat semua elemen dari A yang bukan anggota dari B.



Gambar 2.7. Diagram Venn Selisih Himpunan

Contoh 1:

Misalkan $\mathrm{A} = \{1,2,3,4\}, \mathrm{B} = \{3,4,5\}$. Tentukan $A - B$ dan $B - A$.

Penyelesaian:

$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{1,2\}, \mathrm{B} - \mathrm{A} = \{5\}$. Perhatikan bahwa hasil $A - B$ dan $B - A$ berbeda, yang menunjukkan bahwa operasi ini tidak bersifat komutatif.

Contoh 2 (soal cerita):

Dalam suatu kelompok terdapat:

- 30 siswa mengikuti klub Bahasa Inggris.
- 18 siswa mengikuti klub Bahasa Jepang.
- 12 siswa mengikuti keduanya.

Berapa banyak siswa yang tidak mengikuti Bahasa Inggris?

Penyelesaian:

Siswa yang hanya mengikuti Bahasa Inggris adalah $|\mathrm{E} - \mathrm{J}| = |\mathrm{E}| - |\mathrm{E} \cap \mathrm{J}| = 30 - 12 = 18$.

Contoh 3:

Jika $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ dan $\mathrm{B} = \{\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$, tentukan $A - B$ dan $B - A$.

Penyelesaian:

$\mathrm{A - B = \{a, b\}}$
$\mathrm{B - A = \{e\}}$

Catatan penting:

1. Hasil dari operasi selisih tidak bisa negatif: hasilnya adalah himpunan (bisa kosong).
2. Operasi selisih sering digunakan untuk menyaring elemen-elemen tertentu dari suatu himpunan.
3. Dalam aplikasi logika dan pemrograman, selisih sering berkaitan dengan operasi penyaringan (*filtering*) atau pengecualian data (*exclusion*).

Latihan Mandiri:

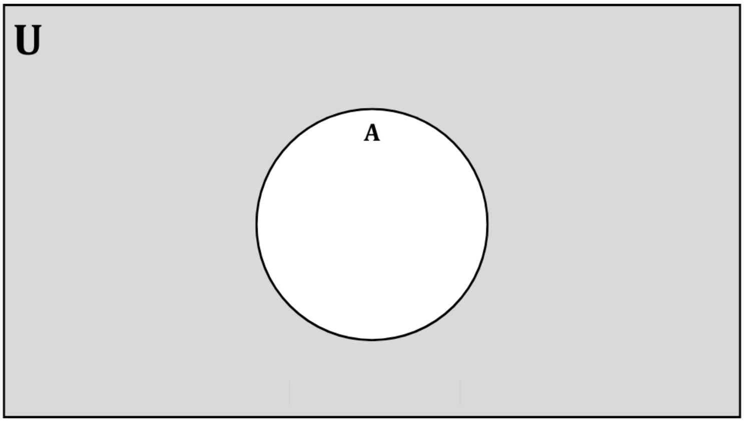
1. Jika $\mathrm{A = \{1,2,3,4,5\}}$ dan $\mathrm{B = \{2,4,6\}}$, tentukan $A - B$ dan $B - A$.
2. Dalam suatu survei, 50 orang menyukai film aksi, 30 orang menyukai film komedi, dan 20 orang menyukai keduanya. Berapa orang yang hanya menyukai film aksi?
3. Diketahui $\mathrm{U = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 10\}}, A = \{2,4,6,8\}$. Tentukan $U - A$.

2.4.4 Komplemen Himpunan (Complement)

Komplemen himpunan adalah operasi yang menghasilkan himpunan baru yang berisi semua elemen dari himpunan semesta yang tidak terdapat dalam himpunan yang dimaksud. Jika U adalah himpunan semesta dan A adalah himpunan bagian dari U, maka komplemen dari A dinotasikan dengan A^c, yang didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}}$$

Artinya, komplemen A terdiri atas semua elemen yang berada dalam himpunan semesta U, tetapi tidak berada di A.



Gambar 2.7. Diagram Venn Komplemen Himpunan

Contoh 1:

Diketahui: $\mathrm{U} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}, \mathrm{A} = \{\mathrm{b}, \mathrm{d}\}$. Tentukan A^c.

Penyelesaian:

$\mathrm{A^c} = \{\mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{e}\}$

Contoh 2:

Diketahui $\mathrm{U} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{Z} \mid -3 \leq \mathrm{x} \leq 3\}$ dan $\mathrm{A} = \{-1,0,1\}$. Tentukan komplemen dari A.

Penyelesaian:

$\mathrm{U} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} \Rightarrow \mathrm{A^c} = \{-3,-2,2,3\}$

Contoh 3 (Hukum De Morgan):

Diketahui $\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$, $\mathrm{B} = \{1,2,3\}$ tentukan $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c$ dan $\mathrm{A^c} \cap \mathrm{B^c}$.

Penyelesaian:

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1,2,3,4,6\} \Rightarrow (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = \{5\}$

$\mathrm{A}' = \{1,3,5\}, \mathrm{B}' = \{4,5,6\} \Rightarrow \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' = \{5\}$

Catatan penting:

1. Komplemen selalu bergantung pada himpunan semesta yang didefinisikan. Jika tidak ada himpunan semesta

yang disebutkan secara eksplisit, maka tidak mungkin menentukan komplemen secara pasti.

2. Operasi komplemen sangat penting dalam logika, pengambilan keputusan, dan sistem basis data, dengan kita perlu memilih objek yang tidak memenuhi kriteria tertentu.

Latihan mandiri:

1. Jika $\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, dan $\mathrm{A} = \{2,3,5\}$, tentukan A^c.
2. Diketahui $\mathrm{U} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{N} \mid \mathrm{x} \leq 10\}$, dan $\mathrm{B} = \{1,3,5,7,9\}$. Tentukan komplemen dari B.
3. Tunjukan bahwa $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\mathrm{c}} = \mathrm{A}^{\mathrm{c}} \cup \mathrm{B}^{\mathrm{c}}$.

2.4.5 Aljabar Himpunan

Hukum-hukum aljabar himpunan menyatakan berbagai identitas atau aturan dasar yang berlaku dalam operasi himpunan seperti gabungan, irisan, dan komplemen. Pemahaman terhadap hukum ini sangat penting dalam menyederhanakan ekspresi himpunan, menyusun argumen logis, dan membuktikan pernyataan dalam teori himpunan, serta aplikasinya dalam logika dan algoritma. Berikut adalah daftar hukum aljabar himpunan.

1. Hukum Komutatif: urutan tidak mempengaruhi hasil.
$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$$
$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$$
2. Hukum Asosiatif: pengelompokan tidak mempengaruhi hasil.
$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$$
$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$
3. Hukum Distributif: Gabungan dan irisan bisa didistribusikan satu sama lain.
$$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$$
$$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$
4. Hukum Identitas: Operasi dengan himpunan kosong atau semesta menghasilkan himpunan itu sendiri.

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap U = A$$

5. Hukum Himpunan Dominan (Dominasi): Gabungan dengan semesta mencakup semua; irisan dengan kosong menghasilkan kosong.
$$A \cup U = U$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
6. Hukum Idempoten: Menggabungkan atau mengiriskan himpunan dengan dirinya sendiri tidak mengubah hasil.
$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$
7. Hukum Inversi (Komplemen): Himpunan dan komplemennya saling melengkapi semesta dan saling lepas.
$$A \cup A^c = U$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$
8. Hukum Absorpsi (Penyerapan): Operasi campuran dapat disederhanakan menjadi satu himpunan saja.
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$
9. Hukum *Double* Komplemen (Involusi): Mengambil komplemen dua kali mengembalikan himpunan semula.
$$(A^c)^c = A$$
10. Hukum De Morgan: Negasi dari gabungan adalah irisan komplemen; begitupula sebaliknya.
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
11. Hukum 0/1
$$\emptyset^c = U$$
$$U^c = \emptyset$$

2.4.5. Pembuktian kesamaan dua himpunan

Dua himpunan dikatakan sama jika memiliki anggota yang sama persis, tanpa memperhatikan urutan ataupun pengulangan elemen. Kesamaan ini dinotasikan dengan tanda sama:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ dan } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

Artinya, kesamaan dua himpunan dibuktikan dengan menunjukkan bahwa masing-masing merupakan subhimpunan dari yang lain:

$$A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Strategi pembuktian untuk membuktikan bahwa $A = B$ dengan Langkah umum sebagai berikut.

1. Ambil sebarang anggota $x \in A$. Tunjukkan bahwa $x \in B$ artinya $A \subseteq B$.
2. Ambil sebarang anggota $y \in B$. Tunjukkan bahwa $y \in A$ artinya $B \subseteq A$.
3. Karena kedua arah terbukti, maka $A = B$.

Contoh pembuktian:

Buktikan hukum De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Bukti:

Misalkan semesta U, ambil $x \in (A \cap B)^c$, maka $x \notin (A \cap B)^c$, maka $x \notin A$, atau , $x \notin B \rightarrow x \in A^c \cup B^c$, maka $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Sebaliknya, ambil $x \in A^c \cup B^c$, maka $x \in A^c$, atau $x \in B$, sehingga $x \notin A$, atau $x \notin B$, maka $x \notin A \cap B \rightarrow x \in (A \cap B)^c$, maka $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. Dapat ditarik kesimpulan bahwa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

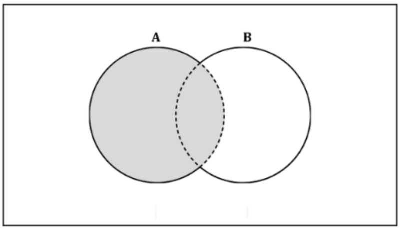
Kesamaan dua himpunan juga dapat dibuktikan dengan hukum aljabar himpunan dan diagram venn.

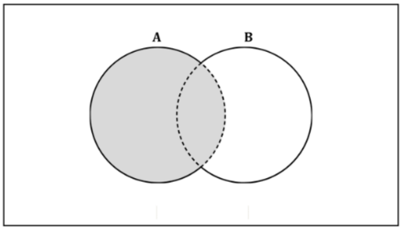
1. Pembuktian dengan diagram venn

Contoh:

Misalkan A, B adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (A \cap B) = A$ dengan diagram venn.

Penyelesaian:





$\mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ A

Kedua diagram venn mempunyai arsiran yang sama sehingga terbukti $\mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{A}$.

2. Pembuktian dengan hukum aljabar himpunan

Contoh:

Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

Penyelesaian:

$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B)$ ………. Hukum distributif

$A \cup (A^c \cap B) = U \cap (A \cup B)$ ………. Hukum Inversi (Komplemen)

$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup B)$ ………. Hukum Identitas

Terbukti memanfaatkan hukum distributif, hukum inversi, dan hukum identitas bahwa $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

Latihan mandiri:

1. Misalkan A, B dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$ dengan menggunakan diagram venn.
2. Dengan menggunakan hukum aljabar himpunan, buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.
3. Buktikan bahwa $A \cup (B \cap A^c) = A \cup B$ dengan menggunakan diagram venn dan hukum aljabar himpunan.

2.5. Kardinalitas, Himpunan Kuasa dan Produk Kartesius

2.5.1. Kardinalitas

Kardinalitas adalah ukuran banyaknya elemen yang terdapat dalam suatu himpunan. Secara formal, kardinalitas dari suatu himpunan A dinyatakan dengan simbol $|A|$ yang menunjukkan jumlah anggota unik dalam himpunan tersebut. Konsep ini sangat penting karena menjadi dasar dalam berbagai bidang matematika, seperti teori himpunan, kombinatorika, serta analisis kompleksitas algoritma. Untuk himpunan hingga, kardinalitas dihitung dengan menjumlahkan elemen-elemen tanpa memperhitungkan pengulangan.

Contoh 1:

Misalkan $A = \{2,4,6,8\}$, maka $|A| = 4$.

Jika sebuah elemen dituliskan lebih dari sekali, pengulangan tersebut tidak memengaruhi kardinalitas, karena sifat dasar himpunan adalah tidak mengandung duplikasi.

Contoh 2:

Jika $B = \{1,3,3,5,5,5\}$, maka $|B| = 3$.

Kardinalitas gabungan himpunan dituangkan dalam prinsip Inklusi-Eksklusi dimana untuk dua himpunan A dan B berlaku:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh 3:

Berapakah banyaknya bilangan bulat antara 1 sampai dengan 50 yang habis dibagi 2 atau 3?

Penyelesaian:

A = Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 2;

B = Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3;

$A \cap B$ = Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 2 dan 3. Dalam hal ini himpunan bilangan bulat yang habis dibagi KPK (Kelipatan Persekutuan Terkecil) dari 2 dan 3, yaitu 6.

$|A| = \left\lfloor \frac{50}{2} \right\rfloor = 25;$

$|B| = \left\lfloor \frac{50}{3} \right\rfloor = 16;$

$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{50}{6} \right\rfloor = 8;$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 16$

Jadi, ada 33 bilangan bulat antara 1 sampai dengan 50 yang habis dibagi 2 atau 3.

Untuk himpunan A, B dan C berlaku prinsip Inklusi-Eksklusi berikut.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk n buah himpunan A, berlaku prinsip Inklusi-Eksklusi

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$
$$\sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

2.5.2. Himpunan Kuasa (Power Set)

Himpunan kuasa dari himpunan A, dinotasikan $P(A)$, adalah himpunan dari semua subhimpunan yang mungkin dari A, termasuk himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan itu sendiri. Jika $|A| = n,$ maka banyaknya anggota pada $P(A)$ adalah:

$$\boldsymbol{|P(A)| = 2^n}$$

Hal ini disebabkan karena setiap elemen dari A memiliki dua pilihan: masuk ke dalam suatu subhimpunan atau tidak masuk.

Sifat-sifat himpunan kuasa:

1. Termasuk himpunan kosong.
2. Termasuk himpunan itu sendiri.
3. Jumlah subhimpunan tergantung jumlah anggota himpunan.

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2\}$, maka semua subhimpunan dari A adalah:

- $\emptyset$
- $\{1\}$
- $\{2\}$
- $\{1,2\}$

Sehingga:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Jumlah anggota:

$$|P(A)| = 2^2 = 4$$

Contoh 2:

Jika $B = \{a, b, c\}$, maka

$$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Jumlah anggota:

$$|P(B)| = 2^3 = 8$$

Latihan mandiri:

1. Tentukan $P(A)$, jika $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.
2. Berapa banyak sub himpunan dari himpunan $B = \{a, b, c, d\}$? Tuliskan subhimpunannya.
3. Jika suatu himpunan memiliki 5 anggota, berapa jumlah subhimpunan yang memiliki 3 anggota?

2.5.3. Produk Kartesius

Produk Kartesius dari dua himpunan adalah himpunan pasangan terurut yang dibentuk dari semua kemungkinan penggabungan elemen dari himpunan pertama dengan elemen dari himpunan kedua. Jika A dan B adalah dua himpunan, maka produk Kartesius dari A dan B ditulis sebagai:

$$\mathrm{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}}$$

Setiap anggota dari $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ adalah pasangan berurut (a, b) dengan urutan yang penting yaitu aggota pertama dari A dan anggota kedua dari B.

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2\}$ dan $B = \{x, y\}$, maka:

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(1, \mathrm{x}), (1, \mathrm{y}), (2, \mathrm{x}), (2, \mathrm{y})\}$$

Jika dibalik:

$$\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \{(\mathrm{x}, 1), (\mathrm{x}, 2), (\mathrm{y}, 1), (\mathrm{y}, 2)\}$$

Terlihat bahwa $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$

Contoh 2:

Jika $|A| = m$ dan $|B| = n$, maka:

$$|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = \mathrm{m} \times \mathrm{n}$$

Misalkan $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$ dan $\mathrm{B} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, maka:

- $|\mathrm{A}| = 3, |\mathrm{B}| = 2$
- $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = 6$ dengan anggota $\{(1, \mathrm{a}), (1, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (3, \mathrm{b})\}$

Latihan mandiri:

1. Tentukan $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ jika $\mathrm{A} = \{1,2\}, \mathrm{B} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$.
2. Berapa banyak anggota dalam $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ jika $|\mathrm{C}| = 4 \text{ dan } |\mathrm{D}| = 3$. Tuliskan seluruh pasangannya.
3. Jelaskan mengapa $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$?

BAB 3
MATRIKS, RELASI, DAN FUNGSI

3.1. Konsep Dasar Matriks dan Operasi Matriks

3.1.1. Bentuk Umum Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan atau elemen lain yang diatur dalam baris dan kolom. Secara formal, matriks didefinisikan sebagai fungsi dari pasangan bilangan bulat (i, j) ke suatu himpunan, biasanya bilangan real atau kompleks. Sebuah matriks berukuran $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ memiliki m baris dan n kolom, dan dituliskan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dimana setiap anggota a_{ij} merupakan entri matriks pada baris $ke - i$ dan kolom $ke - j$.

Contoh:

Matriks A dengan ukuran 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks ini memiliki 2 baris dan 3 kolom dengan anggota $a_{12} = 2$(baris ke-1, kolom ke-2) dan $a_{21} = 4$.

3.1.2. Jenis-jenis Matriks

Matriks memiliki berbagai jenis yang diklasifikasikan berdasarkan ukuran, susunan elemen, atau sifat khususnya. Pemahaman terhadap jenis-jenis matriks ini penting karena banyak sifat dan operasi aljabar hanya berlaku untuk jenis tertentu saja.

1. Matriks Nol (*Zero Matrix*)

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol. Matriks ini dilambangkan sebagai O.

Contoh:

$$\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks nol sering menjadi elemen identitas aditif dalam aljabar matriks.

2. Matriks Persegi (*Square Matrix*)

Matriks persegi memiliki jumlah baris sama dengan jumlah kolom, yaitu berukuran $n \times \mathrm{n}$. Matriks jenis ini sering digunakan dalam transformasi linier dan penentuan determinan serta invers.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\textbf{ukuran } 2 \times 2)$$

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen di luar diagonal utama (dari kiri atas ke kanan bawah) adalah nol.

Contoh:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal khusus yang semua elemen diagonal utama bernilai satu. Notasinya adalah I_n dengan n adalah ukuran matriks.

Contoh:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas bersifat netral terhadap perkalian: $AI = IA = A$ untuk setiap matriks persegi A.

5. Matriks Transpos (*Transpose Matrix*)

Transpos dari Matriks A adalah matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom. Transpos matriks A dinotasikan sebagai A^T.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Simetri

Matriks simetri adalah matriks persegi yang sama dengan transposnya: $A = A^T$.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = A$$

7. Matris Atas dan Bawah Segitiga

Segitiga atas artinya elemen dibawah diagonal utama bernilai nol, sebaliknya segitiga bawah artinya elemen diatas diagonal utama bernilai nol.

Contoh matriks segitiga atas:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Contoh matriks segitiga bawah:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Kolom dan Matriks Baris

Matriks kolom adalah matriks yang hanya memiliki satu kolom. Matriks baris adalah matriks yang hanya memiliki satu baris.

Contoh matriks kolom:

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Contoh matriks baris:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3.1.3. Operasi dalam Matriks

Matriks dapat dikenai berbagai operasi aljabar yang serupa dengan operasi pada bilangan, seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Namun, karena struktur matriks lebih kompleks, ada aturan khusus yang harus dipenuhi agar operasi tersebut terdefinisi.

1. Penjumlahan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan jika memiliki ukuran (jumlah baris dan kolom) yang sama. Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \left[\mathrm{a_{ij}} + \mathrm{b_{ij}}\right] \text{ untuk setiap i dan j}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Mirip dengan penjumlahan, pengurangan matriks dilakukan dengan mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian dari dua matriks berukuran sama.

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = [\mathrm{a_{ij}} - \mathrm{b_{ij}}]$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-(-1) \\ 4-0 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Skalar

Perkalian skalar adalah mengalikan setiap elemen matriks dengan suatu bilangan real (skalar). Misalkan k adalah bilangan sekalar dan A adalah matriks, notasi:

$$\mathrm{kA} = [\mathrm{k} \cdot \mathrm{a_{ij}}]$$

Contoh:

$$k = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

4. Perkalian Matriks

Matriks A berukuran $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ dapat dikalikan dengan matriks B berukuran $\mathrm{n} \times \mathrm{p}$. Hasilnya adalah matriks baru $C = AB$ berukuran $\mathrm{m} \times \mathrm{p}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Langkah perhitungan:

- Pastikan jumlah kolom A = jumlah baris B.
- Hitung setiap entri hasil dengan menjumlahkan hasil kali dari elemen-elemen baris A dan kolom B.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah AB.

Jawab:

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot 1 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Latihan mandiri:

1. Diberikan matriks A dan B.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

a. $A + B$
b. $A - B$
c. 3A

2. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

a. AB
b. BA

3. Tuliskan bentuk umum matriks
   a. Matriks diagonal 3×3
   b. Matriks segitiga atas 3×3
   c. Matriks simetri 3×3

3.2. Relasi: Refleksif, Simetris, dan Transitif

3.2.1. Konsep Umum Relasi

Dalam matematika diskrit, relasi merupakan konsep fundamental yang menggambarkan hubungan antara dua himpunan. Secara formal, relasi R dari himpunan A ke himpunan

B adalah himpunan pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Jika $A = B,$ maka relasi disebut relasi biner pada himpunan A.

$$R \subseteq A \times A$$

Jika pasangan terurut (a, b) merupakan elemen dari relasi R, maka hal ini dapat dinotasikan sebagai $a\, R\, b$ yang dibaca sebagai "a berelasi dengan b melalui relasi R". Notasi ini menyatakan bahwa terdapat hubungan atau kaitan tertentu yang didefinisikan oleh relasi R antara elemen a dan b. Sebaliknya, jika $(a, b) \notin R$, maka dapat dinyatakan dengan notasi $a\, R\, b$ atau cukup dituliskan sebagai "a tidak berelasi dengan b melalui relasi R", yang menandakan bahwa hubungan yang didefinisikan oleh RRR tidak berlaku untuk pasangan tersebut.

Dalam konteks relasi dari himpunan A ke himpunan B, himpunan A disebut sebagai **daerah asal** atau **domain** dari relasi R, karena elemen-elemen A merupakan komponen pertama dari pasangan-pasangan terurut dalam relasi tersebut. Sedangkan himpunan BBB disebut sebagai **daerah hasil** atau **kodomain** (*range* atau *codomain*) dari relasi, karena elemen-elemen B muncul sebagai komponen kedua dari pasangan-pasangan tersebut.

Contoh 1:

Misalkan $A = \{Ami, Beni, Caca\}$ himpunan nama mahasiswa, dan $B = \{IF01, IF02, IF03, IF04\}$ himpunan kode matakuliah.

$A \times B = \{(Ami, IF01), (Ami, IF02), (Ami, IF03), (Ami, IF04),$ $(Beni, IF01), (Beni, IF02), (Beni, IF03), (Beni, IF04),$ $(Caca, IF01), (Caca, IF02), (Caca, IF03), (Caca, IF04)\}$

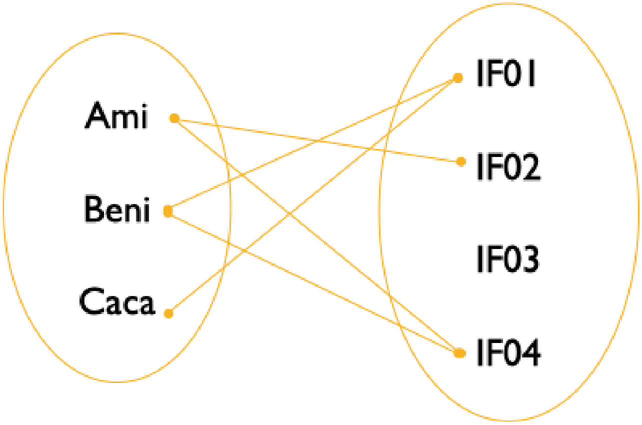
Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu:

R = {(Ami,IF02), (Ami,IF04), (Beni,IF01) (Beni,IF04), (Caca,IF01)}

Ami $\boldsymbol{R}$ IF02, tetapi Beni R IF02.

Contoh 2:

Diagram panah: $R = \{$(Ami,IF02), (Ami,IF04), (Beni,IF01) (Beni,IF04), (Caca,IF01)$\}$



Gambar 3.1. Diagram Panah

Latihan mandiri:

1. Misalkan $A = \{2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 5, 6, 8, 15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari A ke B dengan: $(a, b) \in R$ jika a habis membagi b. Himpunan R yang diperoleh adalah …
2. Misalkan R adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah akar kuadrat dari y. Himpunan R yang diperoleh adalah …

3.2.2. Sifat-sifat Relasi

Relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut yang dibentuk dari dua himpunan (bisa sama atau berbeda). Dalam matematika diskrit, relasi biner dari sebuah himpunan A ke dirinya sendiri (yaitu $R \subseteq A \times A$) dapat memiliki beberapa **sifat khusus** yang penting untuk dikaji. Tiga sifat yang paling sering dianalisis adalah:

1. Refleksif

Sebuah relasi R pada himpunan A dikatakan **refleksif** jika setiap elemen dalam A berelasi dengan dirinya sendiri. Secara formal:

$$\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A},\ (\mathrm{a}, \mathrm{a}) \in \mathrm{R}$$

Contoh 1:

a. $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu $(1,1), (2,2), (3,3),$ dan $(4,4)$.

b. $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ tidak bersifat reflektif karena $(3,3) \notin R$.

Contoh 2:

Relasi "habis dibagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

2. Simetris

Relasi R pada himpunan A disebut simetri jika untuk semua $a, b \in A$: jika $(a, b) \in R,$ maka $(b, a) \in R.$ Sebaliknya, R disebut tak-simetri (*antisymmetric*): jika $a, b \in A$ dan $a \neq b$, maka $(b, a) \notin R.$

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$

a. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$ bersifat simetri karena jika $(a, b) \in R$, maka (b, a) juga $\in R$.

b. $R = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$ tidak bersifat simetri karena $(3,2) \notin R$.

Contoh 2:

Pada himpunan bilangan bulat positif, relasi "habis dibagi" apakah memiliki sifat simetri?

3. Transitif

Relasi R pada himpunan A disebut **transitif** jika $(a,b),\ (b,c) \in R$, maka $(a,c) \in R$, untuk setiap $a,b,c \in A$.

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$

a. $R = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ bersifat transitif.
b. $R = \{(1,1),(2,3),(2,4),(4,2)\}$ tidak bersifat transitif.
c. Apakah relasi $R = \{(1,2),(3,4)\}$ bersifat transitif.

3.2.3. Representasi Relasi

Relasi biner merupakan salah satu konsep dasar dalam matematika diskrit yang dapat direpresentasikan dalam berbagai bentuk. Representasi ini berguna untuk mempermudah analisis terhadap sifat-sifat relasi, serta menjadi jembatan antara teori dan implementasi dalam bentuk algoritma atau sistem terkomputerisasi.

Tiga bentuk representasi utama relasi adalah:

1. Tabel Pasangan Terurut
2. Matriks Relasi
3. Graf Berarah

Setiap bentuk memiliki keunggulan dan kegunaan tersendiri dalam konteks visualisasi dan manipulasi matematis.

1. Representasi dengan Tabel Pasangan Terurut

Representasi tabel menampilkan secara eksplisit daftar pasangan terurut yang termasuk dalam relasi. Representasi ini adalah bentuk paling langsung untuk menunjukkan hubungan antara elemen-elemen dari dua himpunan atau dari satu himpunan ke dirinya sendiri.

Contoh:

$R =$ {(Ami,IF02), (Ami,IF04), (Beni,IF01) (Beni,IF04), (Caca,IF01)}

A	B
Ami	IF02
Ami	IF04
Beni	IF01
Beni	IF04
Caca	IF01

2. Representasi dengan Matriks Relasi

Representasi matriks menyajikan relasi dalam bentuk tabel dua dimensi berisi angka 0 dan 1. Matriks relasi memungkinkan pengujian sifat refleksif, simetris, dan transitif secara sistematis, dan sangat berguna dalam pemrograman atau sistem basis data.

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$. Yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh:

$A = \{\text{Ami, Beni, Caca}\}$

$B = \{IF01, IF02, IF03, IF04\}$

R = {(Ami,IF02), (Ami,IF04), (Beni,IF01) (Beni,IF04), (Caca,IF01)}

Matriks:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

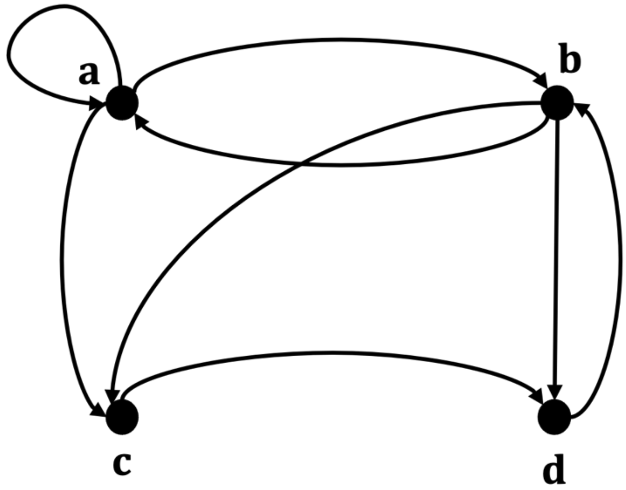
3. Representasi dengan Graf Berarah

Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (simpul atau vertek), dan tiap pasangan berurutan dinyatakan dengan busur atau (*arc*) yang arahnya ditunjukkan dengan sebuah panah. Dengan kata lain, jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul**

asal (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*)

Contoh:

$A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ dan $R = \{(a,a),\ (a,b), (b,a), (b,c), (b,d),$ $(c,a),\ (c,d), (d,b)\}$



Gambar 3.2. Representasi Graf Berarah

Busur yang mempunyai simpul yang sama disebut gelang (*loop*).

3.2.4. Relasi Inversi dan Mengkombinasi Relasi

Definisi relasi inversi: Jika diberikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B, kita bisa mendefinisak relasi baru dari B ke A dengan cara membalikan urutan dari setiap pasangan terurut di dalam R. Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Inversi dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Contoh:

Misalkan $A = \{2,\ 3,\ 4\}$ dan $B = \{2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan: $(a, b) \in R$ jika a habis membagi b.

Maka:

- $\mathrm{R} = \{(2,2), (2,4), (2,8), (3,9), (3,15), (4,4), (4,8)\}$
- Matriks relasi M adalah 3×5 (baris untuk A kolom untuk B)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Invers Relasi $R^{-1} = \{(2,2), (4,2), (8,2), (9,3), (15,3), (4,4), (8,4)\}$
- Matriks invers $N = M^T$. Karena R^{-1} adalah relasi B ke A, maka matriksnya adalah transpos dari M:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kombinasi relasi merupakan konsep penting dalam teori himpunan dan relasi, yang dua atau lebih relasi dapat dikombinasikan untuk membentuk relasi baru. Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2, R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga merupakan relasi dari A ke B.

Contoh 1:

$\mathrm{R} = \{(1,2), (2,3)\}$

$\mathrm{S} = \{(2,3), (3,4)\}$

Maka: $\mathrm{R} \cup \mathrm{S} = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Contoh 2:
$R = \{(1,2), (2,3)\}$
$S = \{(2,3), (3,4)\}$
Maka: $R \cap S = \{(2,3)\}$

Contoh 3:
$R = \{(1,2), (2,3)\}$
$S = \{(2,3), (3,4)\}$
Maka $R - S = \{(1,2)\}$

Contoh 4:
$R = \{(1,2), (2,3)\}$
$S = \{(2,5), (3,6)\}$
Maka
Dari $(1,2) \in R$ dan $(2,5) \in S \rightarrow (1,5) \in R \oplus S$
Dari $(2,3) \in R$ dan $(3,6) \in S \rightarrow (2,6) \in R \oplus S$
$R \oplus S = \{(1,5), (2,6)\}$

Latihan Mandiri:
$A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$
$R_1 = \{(a, a),\ (b, b),\ (c, c)\}$
$R_2 = \{(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (a, d)\}$
Tentukan:
$R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$, dan $R_1 \oplus R_2$

3.2.5. Fungsi

3.2.5.1 Definisi Fungsi

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap elemen di himpunan domain $\boldsymbol{A}$ dengan tepat satu elemen di himpunan kodomain B. Jika f adalah fungsi dari A ke B, kita tulis

$$f: A \rightarrow B$$

Yang artinya f **memetakan** A ke B.

Nama lain fungsi adalah pemetaan atau transformasi. Jika (a)=b, maka b disebut bayangan (*image*) dari a, dan a disebut pra-bayangan (*pre-image*). Fungsi adalah relasi yang khusus. Kekhususannya ini tercakup pada dua hal penting:

1. Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a,\ b) \in f$ dan $(a,\ c) \in f$, maka $b = c$.

Contoh:

1. Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$. Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ adalah fungsi dari A ke B. Domain fungsi adalah A, kodomain adalah B, dan range adalah $\{u, v, w\}$.
2. Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$. Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ adalah fungsi dari A ke B. Domain fungsi adalah A, kodomain adalah B, dan range adalah $\{u, v\}$.
3. Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{u, v, w\}$. Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ bukan fungsi karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

Latihan mandiri:

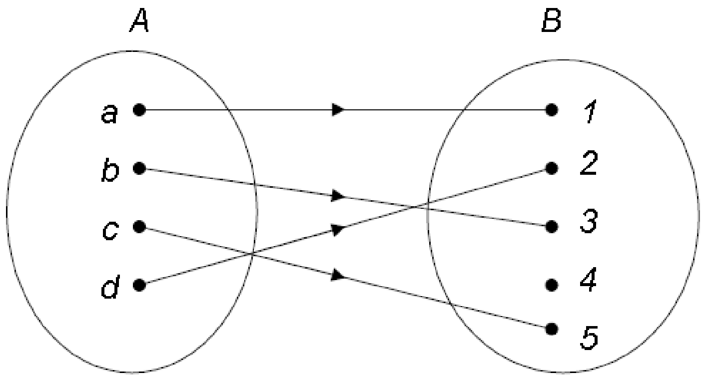
Misalkan A adalah himpunan mahasiswa. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan A?

(1) Setiap mahasiswa memetakan NIM-nya.
(2) Setiap mahasiswa memetakan nomer *handphone*-nya.
(3) Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya.
(4) Setiap mahasiswa memetakan jenis kelamin.
(5) Setiap mahasiswa memetakan anaknya.

3.2.5.2 Jenis-jenis fungsi

1. Fungsi Injektif (Satu-satu)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut injektif jika setiap elemen berbeda pada domain A dipetakan ke elemen berbeda pada kodomain B.



Contoh :

a. Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ merupakan fungsi satu-satu.
b. Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ bukan merupakan fungsi satu-satu karena $f(1) = f(2) = u$.

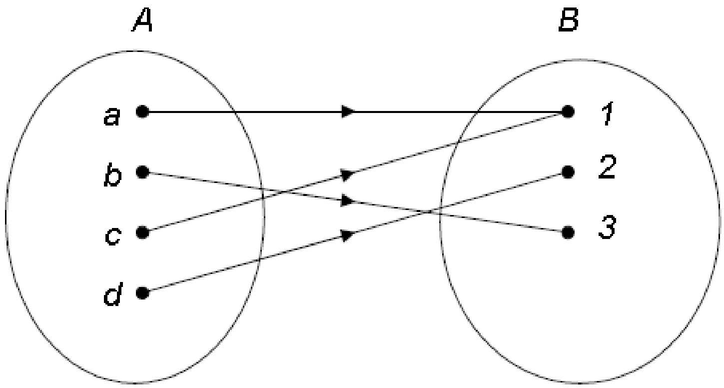
Latihan:

Misalkan $f: Z \to Z$

a. Apakah $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi satu-satu?
b. Apakah $f(x) = x^2 + 1$ merupakan fungsi satu-satu?

2. Fungsi Surjektif (Onto)

Fungsi $f: A \to B$ dikatakan **surjektif** atau **pada** jika setiap elemen pada himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain, seluruh elemen B menjadi range dari f.



Contoh:

a. Relasi $f = \{(1,u),(2,v),(3,w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u,v,w\}$ merupakan fungsi pada.
b. Relasi $f = \{(1,u),(2,u),(3,w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u,v,w\}$ bukan merupakan fungsi pada karena w bukan merupakan range dari f.

Latihan:

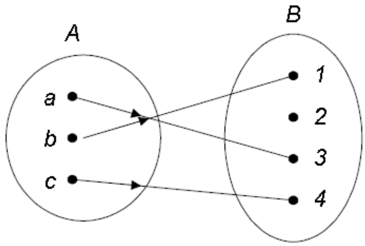
a. Apakah $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi satu-satu?
b. Apakah $f(x) = x^2 + 1$ merupakan fungsi satu-satu?

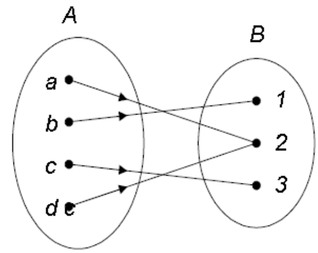
3. Fungsi Bijektif (Satu-satu dan onto)

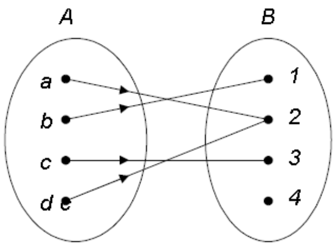
Fungsi f dikatakan **bijektif** atau **berkorespondensi satu-satu** jika f merupakan fungsi satu-satu dan juga fungsi pada.

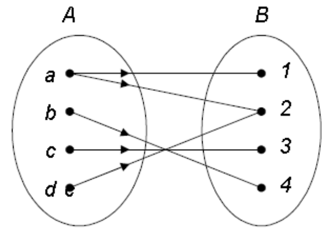
Contoh:

a. Relasi $f = \{(1,u),(2,w),(3,v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{u,v,w\}$ merupakan fungsi bijeksi.
b. Fungsi $f(x) = x + 1$ merupakan bijeksi karena f adalah fungsi satu-satu dan juga fungsi pada.









4. Fungsi Invers

Jika f adalah fungsi bijeksi dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** atau **invers** dari f. Fungsi invers dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan $a \in A$ dan $b \in B$. Jika $f(a) = b$, maka $f^{-1}(b) = a$. Fungsi bijeksi atau berkorespondensi satu-satu sering dinamakan juga fungsi yang ***invertible*** (dapat dibalikkan)

Contoh:

a. Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, x), (4, v)\}$ dari $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ merupakan fungsi bijeksi. Invers fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (x, 3), (v, 4)\}$.
b. Tentukan invers dari fungsi $f(x) = x + 1$

5. Komposisi fungsi

Komposisi dua fungsi merupakan suatu operasi yang menghasilkan fungsi baru dengan cara menggabungkan dua fungsi. Misalnya terdapat dua fungsi:

$$f: A \to B$$

$$g: B \rightarrow C$$

Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Contoh:

Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$.

Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$

Latihan mandiri:

Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

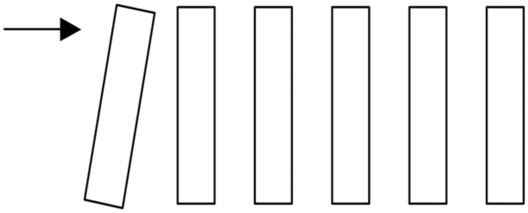
BAB 4
INDUKSI MATEMATIKA

Induksi Matematika adalah cara standar dalam membuktikan bahwa sebuah pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan asli. Pembuktian dengan cara ini terdiri dari dua langkah, yaitu:

1. Basis induksi, yaitu menunjukkan bahwa pernyataan itu berlaku untuk bilangan 1.
2. Langkah induksi, yaitu menunjukkan bahwa jika pernyataan itu berlaku untuk bilangan n, maka pernyataan itu juga berlaku untuk bilangan n+1.

Jika kedua langkah ini berhasil dibuktikan, maka berdasarkan prinsip induksi matematika, pernyataan tersebut berlaku untuk semua $n \in N$.

Induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas. Induksi matematika seperti efek domino.



Contoh 1:

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*: Untuk n = 1, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Pernyataan ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) *Langkah induksi*: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n2$$

adalah benar (hipotesis induksi).

Perlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1)$$
$$= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1)$$
$$= n2 + (2n + 1)$$
$$= n2 + 2n + 1$$
$$= (n + 1)^2$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1,\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*: Untuk $n = 1$ benar, karena diperoleh:

$$= \frac{1(1+1)}{2}$$
$$= \frac{1(2)}{2}$$
$$= 1$$

(ii) Langkah induksi: Andaikan $\mathrm{p(n)}$ benar, yaitu pernyataan

$$= \frac{1(1+1)}{2}$$
$$= \frac{1(2)}{2}$$
$$= 1$$

adalah benar.

Perlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(\mathrm{n}+1)+1]}{2}$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(\mathrm{n}+1)+1]}{2}$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua

$n \geq 1, \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Contoh 3:

Untuk semua bilangan bulat tidak negatif n, buktikan dengan induksi matematika bahwa $2^0+2^1+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*: Untuk $n=0$ benar, karena diperoleh:

$$\begin{aligned}2^0 &= 2^{0+1}-1\\ 1 &= 2^1-1\\ &= 2-1\\ &= 1\end{aligned}$$

(ii) *Langkah induksi*: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$2^0+2^1+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

adalah benar.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$$2^0+2^1+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{(n+1)+1}-1$$

Juga benar. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$2^0+2^1+\cdots+2^n+2^{n+1}=(2^0+2^1+\cdots+2^n)+2^{n+1}$

$2^0+2^1+\cdots+2^n+2^{n+1}=(2^{n+1}-1)+2^{n+1}$

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1$$
$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = (2 \cdot 2^{n+1}) - 1$$
$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$
$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$

Contoh 4:

Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar $\boldsymbol{n}$ sen (dengan $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{8}$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Penyelesaian

(i) *Basis induksi*: Untuk *n* = 8, membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangko 5 sen. Ini jelas benar.

(ii) *Langkah induksi*. **Andaikan $\boldsymbol{p(n)}$ benar**, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n (dengan $n \geq 8$) dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen. Selanjutnya **akan ditunjukkan $\boldsymbol{p(n+1)}$, benar**, yaitu untuk membayar biaya pos $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen.

Ada dua kemungkinan yang harus diperiksa:

a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen dengan <u>sedikitnya</u> satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$.

b) Kemungkinan kedua, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen hanya dengan perangko 3 sen. Karena $n \geq 8$, setidaknya digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti 3 buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$.

Contoh 5:

Untuk semua $n \geq 1$, buktikan pernyataan dengan induksi matematika bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*: Untuk *n* = 1 benar, karena $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ adalah kelipatan 3.

(ii) *Langkah induksi*: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu :

$(n+1)^3 + 2(n+1)$ adalah keliapatan 3.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2)$

$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$

$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$

Karena $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi) dan $3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3, maka $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3; karena itu $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3.

Terbukti bahwa untuk $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Latihan mandiri:

1. Jika $A_1, A_2, \cdots, A_n$ masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematika hukum De Morgan rampatan berikut:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c$$

2. Buktikan dengan induksi matematika bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk *n* bilangan bulat positif.

BAB 5
BILANGAN BULAT

5.1. Aritmatika Bilangan Bulat

5.1.1. Definisi Bilangan Bulat

Bilangan bulat merupakan himpunan bilangan yang terdiri dari bilangan bulat negatif, nol, dan bilangan bulat positif. Notasi untuk himpunan bilangan bulat biasanya dilambangkan dengan huruf Z, yang berasal dari kata *Zahlen* dalam bahasa Jerman yang berarti “bilangan”.

$$\mathrm{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Bilangan bulat adalah dasar bagi berbagai konsep dalam matematika diskrit dan aritmetika modular. Operasi-operasi dasar seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dalam bilangan bulat bersifat tertutup, artinya hasil dari operasi tersebut selalu berada dalam himpunan bilangan bulat.

Bilangan bulat terdiri atas 3 bagian:

1. Bilangan bulat positif: $\mathrm{Z}^{+} = \{1,2,3, \dots\}$
2. Bilangan nol: {0}
3. Bilangan bulat negatif: $\mathrm{Z}^{-} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

5.1.2 Operasi Aritmatika pada Bilangan Bulat

Operasi dasar yang dapat dilakukan pada bilangan bulat meliputi:

a) Penjumlahan

Operasi penjumlahan bilangan bulat mengikuti aturan tanda. Bila dua bilangan memiliki tanda yang sama, hasilnya adalah penjumlahan nilai absolutnya dan bertanda sama. Bila berbeda tanda, kurangkan nilai absolutnya dan beri tanda sesuai bilangan yang lebih besar. Penjumlahan dua bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat lain:

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} \in \mathrm{Z}, \text{ untuk semua } \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{Z}$$

Contoh:

1) $(-3) + 5 = 2$
2) $-7 + 4 = -3$
3) $-6 + 3 = -3$

b) Pengurangan

Operasi pengurangan memiliki definisi serupa dengan operasi penjumlahan. Pengurangan dua bilangan bulat juga tertutup dalam bilangan bulat:

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} \in \mathrm{Z}$$

Contoh:

1) $7 - 10 = -3$
2) $-8 - 3 = -10$
3) $9 - 3 = 6$

c) Perkalian

Perkalian dua bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat lain $\mathrm{a} \times \mathrm{b} \in \mathrm{Z}$. Perkalian bulat juga mempertimbangkan tanda:

1) Positif x Positif = Positif
2) Negatif x Negatif = Positif
3) Positif x Negatif = Positif

Contoh:

1) $(-4) \times (-2) = 8$
2) $3 \times 4 = 12$
3) $(-5) \times 6 = -30$

d) Pembagian

Misalkan a dan b bilangan bulat, $a \neq 0$. *a* **habis membagi** *b.* Jika terdapat bilangan bulat *c* sedemikian sehingga $b = ac$. Notasi: $a|b$ jika $b = ac$, $c \in Z$ dan $a \neq 0$.

Contoh:

1) $4 \mid 12$ karena $\frac{12}{4} = 3$ (bilangan bulat) atau $12 = 4 \times 3$.
2) Tetapi $4 \mid 13$ karena $\frac{13}{4} = 3.25$ (bukan bilangan bulat).

5.1.3 Sifat-sifat operasi pada bilangan bulat

Berikut adalah sifat-sifat operasi pada bilangan bulat yang penting dalam pembelajaran matematika, khususnya pada aritmetika bilangan bulat. Sifat-sifat ini mencerminkan karakteristik fundamental dari operasi dasar: penjumlahan dan perkalian.

1) Tertutup

a) Penjumlahan

Jika $a, b \in Z$ maka $a + b \in Z$

b) Perkalian

Jika $a, b \in Z$ maka $a. b \in Z$

2) Komutatif

a) Penjumlahan

Untuk setiap $a, b \in Z$ maka berlaku $a + b = b + a$

Contoh:

$4 + (-7) = -3 = (-7) + 4$

b) Perkalian

Untuk setiap $a, b \in Z$ maka berlaku $a. b = b. a$

Contoh:

$(-3) \cdot 5 = -15 = 5 \cdot (-3)$

3) Asosiatif

a) Penjumlahan

Untuk setiap $a, b, c \in Z$, berlaku $(\mathrm{a} + \mathrm{b}) + \mathrm{c} = \mathrm{a} + (\mathrm{b} + \mathrm{c})$

Contoh:

$(2 + (-1)) + 3 = 4 = 2 + ((-1) + 3)$

b) Perkalian

Untuk setiap $a, b, c \in Z$, berlaku $(\mathrm{a}. \mathrm{b}). \mathrm{c} = \mathrm{a}. (\mathrm{b}. \mathrm{c})$

Contoh:

$(-2 \cdot 4) \cdot 3 = -24 = -2 \cdot (4 \cdot 3)$

4) Distributif

Perkalian terhadap penjumlahan bersifat distributif: $\mathrm{a} \cdot (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}$

Contoh:

a) $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$

b) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$

5) Memiliki Identitas

a) Penjumlahan

Terdapat elemen $0 \in Z$, sehingga $\mathrm{a} + 0 = \mathrm{a}$ untuk setiap $a \in Z$.

Contoh:

$-5 + 0 = -5$

b) Perkalian

Terdapat elemen $1 \in Z$, sehingga $\mathrm{a}.1 = \mathrm{a}$ untuk setiap $a \in Z$.

Contoh:

$6 \cdot 1 = 6$

6) Memiliki Invers

a) Invers Penjumlahan

Untuk setiap $a \in Z$ terdapat $-a \in Z$ sehingga $a + (-a) = 0$

Contoh:

$7 + (-7) = 0$

b) Invers Perkalian

Tidak semua bilangan bulat memiliki invers perkalian dalam Z, karena hasilnya sering kali bukan bilangan bulat. Hanya 1 dan -1 yang memiliki invers dalam bilangan bulat.

5.2. Teorema Euclidean

Dalam teori bilangan, salah satu konsep penting adalah mencari Faktor Persekutuan Terbesar (*Greatest Common Divisor*, atau GCD, disingkat FPB) dari dua bilangan bulat. Proses ini sangat berguna dalam berbagai aplikasi, mulai dari penyederhanaan pecahan, kriptografi, hingga teori grup.

Teorema Euclidean adalah metode yang efisien dan sistematis untuk mencari GCD dari dua bilangan.

> **Teorema Euclidean.** Misalkan m dan n bilangan bulat, $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga:
>
> $$m = nq + r$$
>
> dengan $0 \leq r < n$.

Contoh 1:

Misalkan $a = 122$ dan $b = 17$. Maka $122 = 17 \cdot 7 + 3$ dengan $q = 7$ dan $r = 3$. Karena $0 \leq 3 < 17$, maka teorema Euclidean berlaku.

Contoh 2:

Cari FPB dari 122 dan 17.

Penyelesaian:

1) $122 = 17 \cdot 7 + 3$
2) $17 = 3 \cdot 5 + 2$
3) $3 = 2 \cdot 1 + 1$
4) $2 = 1 \cdot 2 + 0$

Karena sisa sudah 0, maka FPB dari 122 dan 17 adalah 1.

Latihan mandiri:

1. Gunakan Teorema Euclidean untuk menentukan hasil bagi dan sisa dari:

a) $245 \div 26$

b) $379 \div 17$

c) $514 \div 33$

2. Tentukan FPB dari:

a) 245 dan 26

b) 122 dan 96

5.3. Pembagian dan Sisa

Dalam matematika, operasi **pembagian** bilangan bulat melibatkan pembagian suatu bilangan bulat a oleh bilangan bulat positif b yang menghasilkan:

$$a = bq + r$$

Dengan:

$a =$ dividen (bilangan yang dibagi)

$b =$ *divisor* (bilangan pembagi, $b \neq 0$)

$q =$ hasil bagi (*quotient*)

$r =$ sisa (*remainder*), yang memenuhi $0 \leq r \leq |b|$

Hubungan ini disebut sebagai bentuk *Euclidean Division.* Konsep pembagian dan sisa adalah fondasi penting dalam berbagai aplikasi matematika diskrit. Ia tidak hanya digunakan dalam operasi aritmatika dasar, tetapi juga dalam pembentukan konsep yang lebih kompleks seperti kongruensi, algoritma Euclidean, dan sistem bilangan modulo.

Contoh:

Misalkan $a = 20$ dan $b = 6$, maka $20 = 6 \cdot 3 + 2$, jadi $q = 3$ dan $r = 2$. Artinya 20 dibagi 6 menghasilkan hasil bagi 3 dan sisa 2.

Latihan mandiri:

1. Tentukan hasil bagi dan sisa dari:

a) $47 \div 6$

b) $125 \div 12$

c) $-29 \div 5$

2. Nyatakan dalam bentuk $a = bq + r$

a) $\mathrm{a} = 58, \mathrm{b} = 7$

b) $\mathrm{a} = -19, \mathrm{b} = 4$

3. Tentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian:

a) $34 \div 5$

b) $81 \div 9$

c) $-20 \div 7$

5.4. Teorema Dasar Aritmatika

Teorema ini merupakan fondasi dari seluruh teori bilangan, karena menyatakan bahwa bilangan prima adalah "bangunan dasar" dari semua bilangan bulat.

> Teorema dasar aritmatika: Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali dari bilangan prima dengan cara yang unik, tanpa memperhatikan urutan faktor.

Artinya, setiap bilangan $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

$$n = P_1^{e_1}, P_2^{e_2} \ldots P_k^{e_k}$$

Dengan:

$P_1, P_2 \ldots P_k$ adalah bilangan prima dan $P_1 < P_2 < \cdots < P_k$

$e_1, e_2 \ldots e_k$ adalah bilangan bulat positif

Teorema ini merupakan fondasi dari seluruh teori bilangan, karena menyatakan bahwa bilangan prima adalah "bangunan dasar" dari semua bilangan bulat.

Contoh:

1. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
2. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
3. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Meskipun cara melakukan faktorisasi bisa berbeda-beda, hasil akhirnya tetap unik jika kita mengurutkan faktornya. Untuk memfaktorkan suatu bilangan bulat menjadi faktor prima, langkah-langkah umum adalah:

1. Bagi bilangan tersebut dengan bilangan prima terkecil (yaitu 2),
2. Jika tidak habis, coba bilangan prima selanjutnya (3, 5, 7, dst.),
3. Ulangi proses hingga hasilnya adalah bilangan prima.

Latihan mandiri:

1. Nyatakan 1260 dalam bentuk faktorisasi prima.

2. Faktorkan 945 dan 120.
3. Buktikan bahwa faktorisasi bilangan 540 adalah unik.

5.5. Kelipatan dan Faktor Persekutuan

Dalam kajian aritmetika bilangan bulat, dua konsep yang sering muncul adalah kelipatan dan faktor. Pemahaman tentang keduanya sangat penting, terutama dalam menyelesaikan persoalan sehari-hari seperti penjadwalan, pembagian sumber daya, dan pengolahan data numerik.

Kelipatan dari suatu bilangan bulat aaa adalah himpunan bilangan bulat yang merupakan hasil perkalian a dengan bilangan bulat positif lainnya.

$$Kelipatan\ dari\ a = \{a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots\}$$

Contoh:

1. Kelipatan dari 4 adalah $4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots$
2. Kelipatan dari 5 adalah $5, 10, 15, 20, 25, \dots$

Faktor atau pembagi dari suatu bilangan bulat n adalah bilangan bulat positif yang membagi *nnn* secara tepat (tanpa sisa).

$$a\ adalah\ faktor\ dari\ n \Leftrightarrow \exists k \in Z,\ sehingga\ n = a \cdot k$$

Contoh:

1. Faktor dari 12 adalah $1, 2, 3, 4, 6, 12$
2. Faktor dari 18 adalah $1, 2, 3, 6, 9, 18$

5.5.1. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Faktor persekutuan dari dua bilangan adalah himpunan bilangan yang merupakan faktor dari kedua bilangan tersebut. FPB (atau GCD - *Greatest Common Divisor*) adalah faktor terbesar yang sama dari dua atau lebih bilangan. Metode mencari FPB:

1. Faktorisasi prima masing-masing bilangan.
2. Ambil faktor yang sama dan pangkat terendah.

Untuk $a, b \in Z$ maka FPB dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d|a$ dan $d|b$. Dalam hal ini dapat ditulis $FPB(a, b) = d$.

Contoh:

Tentukan FPB dari 30 dan 45.

Penyelesaian:

Faktor prima dari $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Faktor prima dari $45 = 3^2 \cdot 5$

FPB dari 30 dan 45 adalah $3 \cdot 5 = 15$ atau $FPB(30,45) = 15$.

5.5.2. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Kelipatan persekutuan dari dua bilangan adalah himpunan bilangan yang merupakan kelipatan dari kedua bilangan. KPK (atau LCM - *Least Common Multiple*) adalah kelipatan persekutuan terkecil dari dua atau lebih bilangan. Metode mencari KPK:

1. Faktorisasi prima masing-masing bilangan.
2. Ambil semua faktor, gunakan pangkat tertinggi.

Contoh 1:

Tentukan KPK dari 30 dan 45

Penyelesaian:

Faktor prima dari $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Faktor prima dari $45 = 3^2 \cdot 5$

KPK dari 30 dan 45 adalah $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

Contoh 2:

Jika Ani dan Budi berlari mengelilingi lapangan. Ani menyelesaikan satu putaran dalam 12 menit dan Budi dalam 18 menit. Setelah berapa menit mereka akan bertemu di titik awal?

Penyelesaian:

Faktor prima dari $12 = 2^2 \cdot 3$ dan $18 = 2 \cdot 3^2$

KPK dari 12 dan 18 adalah $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Latihan mandiri:

1. Tentukan FPB dan KPK dari
   a) 48 dan 72
   b) 80 dan 120
2. Seorang siswa berlatih musik setiap 10 hari, dan olahraga setiap 15 hari. Jika hari ini ia melakukan keduanya, dalam berapa hari lagi ia akan melakukan keduanya secara bersamaan?

5.6. Aritmatika Modulo

Aritmetika modulo merupakan salah satu bentuk aritmetika yang beroperasi berdasarkan sisa pembagian. Konsep ini sangat penting dalam matematika diskrit, karena berkaitan langsung dengan teori bilangan, kriptografi, ilmu komputer, serta struktur aljabar seperti grup dan gelanggang.

Secara sederhana, modulo mengacu pada operasi pembagian yang hanya memperhatikan sisa (*remainder*) dari hasil bagi. Dalam kehidupan sehari-hari, konsep ini dapat kita temui dalam sistem penanggalan (misal: hari ke-10 setelah Senin) atau dalam rotasi jam.

Jika dua bilangan bulat a dan b memiliki selisih yang habis dibagi oleh bilangan bulat positif $n,$ maka dikatakan bahwa a dan b kongruen modulo n dan dapat dituliskan sebagai:

Misalkan a dan m bilangan bulat $(m > 0)$. Operasi $\boldsymbol{a}$ **mod** $\boldsymbol{m}$ (dibaca "a modulo m") memberikan sisa jika a dibagi dengan m.

$$a \equiv b \ \ (mod\ n)$$

Artinya, terdapat bilangan bulat k sedemikian, sehingga:

$$a - b = kn\ atau\ a\ mod\ n = b\ mod\ n$$

Contoh:

a) $17 \equiv 5\ (mod\ 12),$ karena $17 - 5 = 12$
b) $32\ \equiv 2,$ karena sisa bagi $32\ \div 10 = 2$

Operasi modulo memetakan bilangan bulat ke dalam kelompok sisa berdasarkan bilangan modulus. Untuk modulus n, terdapat tepat n kemungkinan nilai sisa, yaitu:

$$\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Nilai-nilai ini sering disebut sebagai kelas kongruensi modulo n.

Dalam teori bilangan, terutama dalam konteks aritmetika modulo, relasi kongruensi bukan hanya sekadar hubungan antara dua bilangan. Kongruensi memiliki berbagai sifat aljabar yang sangat penting, karena memungkinkan manipulasi dan penyederhanaan dalam operasi matematika, khususnya dalam pembuktian dan algoritma yang melibatkan bilangan bulat. Relasi kongruensi modulo memiliki sifat-sifat yang serupa dengan kesamaan biasa, antara lain:

1. Refleksif

Setiap bilangan bulat kongruen dengan dirinya sendiri untuk setiap modulus $n \in Z^{+}$. Artinya $a \equiv a\ (mod\ n)$

Contoh:

$13 \equiv 13\ (mod\ 7)$. Karena $13 - 13 = 0\ dan\ 0\ habis\ dibagi\ 17$.

2. Simetris

Jika suatu bilangan a kongruen dangan b modulo n, maka b juga kongruen dengan a modulo n. Secara formal $a \equiv b\ (mod\ n) \rightarrow b \equiv a\ (mod\ n)$.

Contoh:

$23 \equiv 5\ (mod\ 9) \rightarrow 5 \equiv 23\ (mod\ 9)$. Karena selisihnya $23 - 5 = 18$ dan 18 habis dibagi 9.

3. Transitif

Jika $a \equiv b\ (mod\ n)$ dan $b \equiv c\ (mod\ n)$, maka dapat disimpulkan bahwa $a \equiv c\ (mod\ n)$.

Contoh:

Misalkan $17 \equiv 5\ (mod\ 12)$ dan $5 \equiv 7\ (mod\ 12)$, maka $17 \equiv -7\ (mod\ 12)$.

4. Sifat Penjumlahan

Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$ dan $c \equiv d \ (mod\ n)$, maka $a + c \equiv b + d \ (mod\ n)$.

Contoh:

$12 \equiv 2 \ (mod\ 12)$ dan $11 \equiv 11 \ (mod\ 12)$, maka $14 + 11 \equiv 2 + 11 \ (mod\ 12)$, karena $25\ mod\ 12 = 1$ dan $13\ mod\ 12 = 1$.

5. Sifat Pengurangan

Sama seperti penjumlahan, operasi pengurangan juga berlaku dalam sistem kongruensi: $a - c \equiv b - d \ (mod\ n)$.

Contoh:

$20 \equiv 5 \ (mod\ 15)$ dan $8 \equiv 8 \ (mod\ 15)$, maka $20 - 8 \equiv 5 - 8 \ (mod\ 15)$. Verifikasi: $12\ mod\ 15 = 12$ dan $-3\ mod\ 15 = 12$ karena $-3 + 15 = 12$.

6. Sifat Perkalian

Kongruensi juga kompatibel terhadap perkalian: $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (mod\ n)$. Namun, jika hanya satu pasang kongruen $a \equiv b \ (mod\ n)$, maka cukup $a \cdot c \equiv b \cdot c \ (mod\ n)$.

Contoh:

Jika $7 \equiv 1 \ (mod\ 6)$, maka $7 \cdot 4 = 28 \equiv 1 \cdot 4 = 4 \ (mod\ 6)$. Verifikasi: $28\ mod\ 6 = 4$ dan $4\ mod\ 6 = 4$.

7. Sifat Pangkat

Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$, maka $a^k \equiv b^k \ (mod\ n)$ untuk setiap $k \in N$.

Contoh:

Jika $3 \equiv 7 \ (mod\ 8)$, maka $3^2 = 9 \equiv 7^2 = 49 \ (mod\ 8)$. Verifikasi: $9\ mod\ 8 = 1$ dan $49\ mod\ 8 = 1$.

8. Sifat Substitusi

Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$, maka dalam bentuk fungsi polynomial $f(x)$ akan berlaku: $f(a) \equiv f(b) \ (mod\ n)$.

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dan $6 \equiv 1\ (mod\ 5)$, maka $f(6) = 36 + 12 + 1 = 49$ dan $f(1) = 1 + 2 + 1 = 4$. Verifikasi: $49\ mod\ 5 = 4$ dan $4\ mod\ 5 = 4$.

Latihan mandiri:

1. Buktikan bahwa sifat refleksif, simetris, dan transitif berlaku untuk kongruensi modulo 7.
2. Jika $a \equiv 3\ (mod\ 5)$ dan $b \equiv 2\ (mod\ 5)$, hitung:
    a) $a + b\ (mod\ 5)$
    b) $ab\ (mod\ 5)$
3. Diberikan $x \equiv 4\ (mod\ 9)$, hitung:
    a) $x^2\ (mod\ 9)$
    b) $x^3\ (mod\ 9)$
4. Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $f(x) = 3x + 1$, buktikan bahwa $f(a) \equiv f(b)(mod\ m)$.

5.7. Invers Modulo

Dalam aritmetika modulo, tidak semua operasi memiliki hasil yang sama seperti dalam aritmetika biasa. Salah satu konsep penting yang perlu dipahami adalah invers modulo. Invers modulo sangat berguna dalam menyelesaikan persamaan kongruensi, khususnya dalam persamaan linear modulo, serta dalam aplikasi seperti kriptografi (misalnya algoritma RSA), sandi Caesar, dan komputasi modular.

Misalkan a dan n adalah bilangan bulat dengan $n > 1$. Suatu bilangan bulat a^{-1} disebut invers modulo n dari a jika memenuhi

$$\boxed{a \cdot a^{-1} \equiv 1\ (mod\ n)}$$

Artinya, perkalian a dengan inversnya menghasilkan kongruen 1 dalam modulo n.

Bilangan bulat a memiliki invers modulo n jika dan hanya jika $\text{FPB}(a, n) = 1$. Artinya, a dan n harus relatif prima atau tidak memiliki faktor persekutuan selain 1. Jika $\text{FPB}(a, n) \neq 1$ maka a tidak memiliki invers modulo n.

Contoh:

Apakah 3 memiliki invers modulo 7?

Jawab:

$\mathrm{FPB}(3,7) = 1$, maka mempunyai invers. Berapakah inversnya?

Kita bergerak untuk mencari x, sehingga $3x \equiv 1\ (mod\ 7)$. Diperoleh $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1$, maka $x = 5$. Jadi, invers dari 3 modulo 7 adalah 5.

Teorema Euclidean terbalik dapat digunakan untuk menemukan invers dari $a\ mod\ n$ dengan menggunakan langkah-langkah berikut:

1. Gunakan teorema Euclidean untuk mencari $\mathrm{FPB}(a,n)$.
2. Jika $\mathrm{FPB}(a,n) = 1,$ gunakan Teorema Euclidean terbalik untuk mencari solusi dari $ax + ny = 1$. Solusi $x\ (mod\ n)$ adalah invers dari $a\ mod\ n$.

Contoh:

Carilah invers dari $7\ mod\ 26$.

Penyelesaian:

Langkah 1: pastikan $\mathrm{FPB}(7,26) = 1$

Langkah 2: Gunakan Teorema Euclidean terbalik untuk $7x + 26y = 1$

a) $26 = 3 \cdot 7 + 5$
b) $7 = 1 \cdot 5 + 2$
c) $5 = 2 \cdot 2 + 1$
d) $2 = 2 \cdot 1 + 0$

Substitusi terbalik:

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$1 = 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$

$1 = 3(26 - 3 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 26 - 11 \cdot 7$

Sehingga:

$1 = 3 \cdot 26 - 11 \cdot 7 \rightarrow\ -11 \cdot 7 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 26) \rightarrow x = -11 \equiv 15\ (mod\ 26)$

Jadi, invers dari $7\ mod\ 26$ adalah 15.

Latihan mandiri:

1. Tentukan apakah bilangan berikut memiliki invers modulo, jika yang akan dicari:
    a) $5\ mod\ 11$
    b) $12\ mod\ 17$
    c) $9\ mod\ 27$
2. Gunakan Teorema Euclidean Terbalik untuk mencari invers dari:
    a) $11\ mod\ 26$
    b) $8\ mod\ 29$
3. Selesaikan persamaan kongruensi berikut:
    a) $7x \equiv 4\ (mod\ 13)$
    b) $15x \equiv 3\ (mod\ 17)$

5.8. Aplikasi dalam Kriptografi Dasar

Di era digital, keamanan informasi menjadi salah satu kebutuhan utama. Komunikasi rahasia, transaksi keuangan, hingga penyimpanan data sensitif bergantung pada sistem kriptografi yang andal. Kriptografi yang berasal dari bahasa Yunani *kryptos* (tersembunyi) dan *graphein* (menulis) adalah ilmu dan seni menyandikan pesan agar hanya pihak yang berwenang yang dapat membacanya.

Dalam kriptografi modern, aritmetika bilangan bulat, modulo, dan kongruensi menjadi fondasi penting dalam perancangan algoritma penyandian. Konsep seperti invers modulo, eksponensiasi modular, dan fungsi satu arah menjadi komponen kunci dari algoritma seperti RSA, Diffie-Hellman, dan ElGamal.

Dasar aritmatika modulo dalam kriptografi dengan Kriptografi menggunakan sistem bilangan dalam modulo besar karena beberapa keunggulan:

1. Menjamin keamanan berdasarkan kesulitan faktorisasi bilangan bulat besar.

2. Operasi yang relatif sederhana, namun aman ketika dijalankan dalam bilangan besar (ratusan digit).
3. Proses mengenkripsi dan mendekripsi bisa menggunakan invers modular dan eksponensiasi modular.

Salah satu terobosan dalam kriptografi adalah munculnya kriptografi kunci publik (*asymmetric cryptography*). Di sini, digunakan sepasang kunci:

1. Kunci Publik: diketahui oleh semua orang; digunakan untuk mengenkripsi pesan.
2. Kunci Privat: hanya diketahui oleh pemiliknya; digunakan untuk mendekripsi pesan.

Kriptografi kunci publik membutuhkan sistem matematis yang:

1. Sulit dibalik tanpa informasi tertentu (fungsi satu arah),
2. Mengandalkan operasi matematika yang hanya dapat dibalik menggunakan kunci rahasia,
3. Dapat diimplementasikan dengan efisien secara komputasional.

Salah satu algoritma paling terkenal dalam sistem ini adalah RSA (Rivest–Shamir–Adleman). RSA merupakan algoritma Kriptografi berbasis bilangan bulat. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Pemilihan bilangan prima: pilih dua bilangan prima besar p dan q.
2. Hitung modulo: $\mathrm{n} = \mathrm{p} \times \mathrm{q}$.
3. Hitung Euler’ Totient Function: $\phi(\mathrm{n}) = (\mathrm{p} - 1)(\mathrm{q} - 1)$.
4. Pilih eksponen publik e: Pilih e sedemikian sehingga $1 < \mathrm{e} < \phi(\mathrm{n})$ dan $FPB(\mathrm{e}, \phi(\mathrm{n})) = 1$.
5. Hitung eksponen privat d: cari d sebagai invers dari e modulo $\phi(\mathrm{n})$ yaitu $\mathrm{d} \equiv \mathrm{e} - 1(\mathrm{mod}\phi(\mathrm{n}))$.
6. Pasangan kunci: Kunci public (e, n) dan kunci privat $d, n)$.

Selanjutnya lakukan proses enkripsi dan dekripsi dengan Enkripsi: pesan M diubah menjadi ciphertext C dengan $C \equiv M^e \ (mod\ n)$ dan Dekripsi: ciphertest C dikembalikan menjadi pesan M dengan $M \equiv C^d \ (mod\ n)$.

Contoh:

Misalkan $\mathrm{p} = 5, \mathrm{q} = 11$, maka $n = 55$. $\phi(\mathrm{n}) = (5-1)(11-1) = 4 \times 10 = 40$. Kemudian, pilih $e = 3$, karena $FPB(3{,}40) = 1$. Kemudian, hitung d, sehingga $d \cdot 3 \equiv 1 \ (mod\ 40)$, maka $d = 27$, karena $27 \cdot 3 = 81 \ \equiv 1 \ (mod\ 40)$.

Maka: Kunci publik = $(3{,}55)$ dan kunci privat =$(27{,}55)$. Misalkan pesan yang ingin dikirim adalah $M = 9$.

1. Enkripsi : $C \equiv 9^3 = 729 \ (mod\ 55) \rightarrow C = 14$
2. Dekripsi: $M = 14^{27} \ (mod\ 55) \rightarrow M = 9$

Manfaat aritmatika modulo dalam kriptografi:

1. Efisiensi: Operasi modular cepat dilakukan oleh komputer, bahkan untuk bilangan besar.
2. Keamanan: Sistem modular menjamin keamanan karena bergantung pada masalah matematika yang sulit dipecahkan, seperti faktorisasi bilangan besar.
3. Verifikasi dan otentikasi: Digunakan dalam tanda tangan digital, untuk menjamin keaslian dokumen.
4. Keutuhan data: Dalam hashing (fungsi acak satu arah), kongruensi membantu menciptakan sistem pemeriksaan keutuhan data.

Latihan mandiri:

1. Diberikan $p = 7, q = 17$. Hitung pasangan kunci RSA jika $e = 5$.
2. Diketahui kunci publik $(e = 3, n = 55)$, pesan yang dienkripsi adalah 19. Hitung ciphertex-nya.
3. Tentukan nilai d jika $e = 7$ dan $\phi(\mathrm{n}) = 40$

BAB 6
KOMBINATORIKA

Kombinatorika merupakan cabang penting dalam matematika diskrit yang berfokus pada proses perhitungan, pengaturan, dan penyusunan objek-objek dalam suatu himpunan menurut aturan-aturan tertentu. Kombinatorika tidak hanya berperan sebagai alat bantu perhitungan, tetapi juga sebagai fondasi dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan peluang, teori graf, algoritma, dan optimisasi.

Sejak zaman kuno, konsep perhitungan dalam kombinatorika telah digunakan untuk berbagai keperluan, mulai dari permainan strategi, penyusunan pasukan, hingga perhitungan peluang dalam perjudian. Dalam konteks modern, kombinatorika menjadi sangat relevan dalam pengembangan teknologi informasi, keamanan data, jaringan komputer, hingga biologi komputasi.

6.1. Konsep Dasar Kombinatorika dan Ruang Sampel

Kombinatorika membahas pertanyaan-pertanyaan mendasar seperti:

1. Berapa banyak cara kita dapat memilih sejumlah objek dari suatu kumpulan?
2. Dalam berapa banyak cara objek-objek tersebut dapat disusun?
3. Apa yang terjadi jika objek-objek tersebut identik atau dapat dipilih lebih dari sekali?

Secara umum, permasalahan kombinatorika diklasifikasikan ke dalam beberapa kategori utama:

1. Prinsip penghitungan dasar, seperti aturan penjumlahan dan perkalian.

2. Permutasi, yaitu susunan objek dengan memperhatikan urutan.
3. Kombinasi, yaitu pemilihan objek tanpa memperhatikan urutan.
4. Kombinatorika dengan pengulangan, yaitu ketika pemilihan atau penyusunan memperbolehkan pengulangan elemen.

Salah satu penerapan penting dari kombinatorika adalah dalam teori peluang. Untuk memahami peluang terjadinya suatu peristiwa, diperlukan pemahaman tentang banyaknya cara peristiwa tersebut dapat terjadi dibandingkan dengan keseluruhan kemungkinan yang mungkin terjadi. Semua kemungkinan tersebut membentuk apa yang disebut sebagai ruang sampel.

Kombinatorika digunakan untuk menentukan ukuran ruang sampel dalam berbagai konteks, seperti: banyaknya hasil dari pelemparan dua dadu; banyaknya cara memilih 3 orang dari kelompok yang terdiri dari 10 orang; serta banyaknya kemungkinan kata sandi dari kombinasi huruf dan angka.

Kombinatorika tidak hanya bersifat teoritis, tetapi memiliki aplikasi luas dalam kehidupan nyata. Sebagai contoh, dalam penjadwalan, kombinatorika digunakan untuk menentukan urutan kegiatan yang optimal. Contoh lain, dalam komputasi, kombinatorika digunakan untuk menganalisis kompleksitas algoritma dan struktur data. Dalam kriptografi, kombinatorika digunakan untuk menganalisis kekuatan kata sandi dan kunci enkripsi. Contoh dalam ilmu biologi, kombinatorika digunakan dalam penyusunan urutan DNA dan RNA.

6.2. Prinsip Penghitungan Dasar (*Rule of Sum and Product*)

Dalam kombinatorika, prinsip penghitungan dasar adalah landasan utama yang digunakan untuk menghitung jumlah kemungkinan dari suatu kejadian atau peristiwa. Dua prinsip yang paling mendasar adalah prinsip penjumlahan (*rule of sum*) dan prinsip perkalian (*rule of product*). Kedua prinsip ini memungkinkan kita menyederhanakan perhitungan kombinatorial tanpa perlu menyusun semua kemungkinan secara eksplisit.

6.2.1. Prinsip Penjumlahan (Rule of Sum)

Prinsip penjumlahan menyatakan bahwa: jika suatu tugas dapat diselesaikan dengan salah satu dari dua cara yang saling eksklusif (tidak tumpang tindih), dan cara pertama memiliki m kemungkinan sedangkan cara kedua memiliki n kemungkinan, maka jumlah total cara menyelesaikan tugas tersebut adalah $m + n$.

Contoh 1:

Seorang siswa dapat memilih satu mata pelajaran pilihan dari dua kelompok: Kelompok A memiliki 3 mata pelajaran, dan kelompok B memiliki 2 mata pelajaran. Jika siswa hanya boleh memilih satu mata pelajaran dari salah satu kelompok, maka jumlah total pilihan adalah: $3 + 2 = 5 \text{ cara}$.

Contoh 2:

Di sebuah restoran, terdapat 4 jenis minuman dingin dan 3 jenis minuman panas. Seorang pelanggan hanya boleh memilih satu jenis minuman, baik dingin maupun panas. Maka, jumlah pilihan minuman yang tersedia adalah: $4 + 3 = 7 \text{ pilihan}$.

6.2.2. Prinsip Perkalian (Rule of Product)

Prinsip perkalian menyatakan bahwa: Jika suatu tugas dapat dibagi menjadi dua langkah berturut-turut, dengan langkah pertama memiliki m kemungkinan dan langkah kedua memiliki n kemungkinan, maka jumlah total cara menyelesaikan dua langkah tersebut adalah $m \times n$.

Contoh 1:

Seseorang ingin membuat kombinasi pakaian yang terdiri dari 3 pilihan atasan dan 4 pilihan celana. Maka, total kombinasi pakaian yang bisa dikenakan adalah: $3 \times 4 = 12$ kombinasi.

Contoh 2:

Sebuah sandi terdiri dari dua karakter: karakter pertama adalah huruf vokal (a, i, u, e, o) dan karakter kedua adalah angka dari 0 hingga 4. Maka, banyaknya sandi berbeda yang dapat dibuat adalah: $5 \times 5 = 25$ sandi.

Jika n buah percobaan masing-masing mempunyai $p_1, p_2, \cdots, p_n$, hasil percobaan yang mungkin terjadi yang dalam hal ini setiap p_i tidak bergantung pada pilihan sebelumnya. Maka, jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah:

(a) $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ untuk kaidah perkalian

(b) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ untuk kaidah penjumlahan

Latihan mandiri:

1. Sebuah universitas menawarkan 5 mata kuliah pilihan untuk mahasiswa semester 1, dan 4 mata kuliah pilihan untuk mahasiswa semester 2. Jika seorang mahasiswa hanya boleh memilih satu mata kuliah dari semester manapun, berapa banyak pilihan yang tersedia?
2. Seorang siswa memiliki 4 pilihan buku untuk dibaca dan 3 tempat berbeda untuk membaca (perpustakaan, taman, atau rumah). Berapa banyak kombinasi membaca yang bisa dilakukan siswa tersebut?
3. Suatu restoran memiliki 3 jenis makanan pembuka, 4 makanan utama, dan 2 makanan penutup. Jika pelanggan ingin memesan satu menu dari tiap kategori, berapa total kombinasi menu yang bisa dibuat?
4. Suatu perpustakaan memiliki 6 buah buku berbahasa Inggris, 8 buah buku berbahasa Perancis, dan 10 buah buku berbahasa Jerman. Masing-masing buku berbeda judulnya.

a) Berapa jumlah cara memilih 3 buah buku masing-masing dari tiap bahasa yang berbeda?
b) Berapa jumlah cara memilih 1 buah buku sembarang?

6.3. Permutasi

Permutasi adalah salah satu konsep dasar dalam kombinatorika yang membahas tentang banyaknya cara menyusun atau mengatur objek-objek secara berurutan. Dalam kehidupan sehari-hari, permutasi sering muncul dalam berbagai konteks seperti menyusun kursi, mengatur jadwal, atau menyusun huruf dalam suatu kata. Pada prinsipnya, permutasi menekankan bahwa urutan objek sangat penting.

Jika kita memiliki sekumpulan objek dan ingin mengetahui berapa banyak cara berbeda untuk menyusunnya dalam barisan tertentu, maka permasalahan tersebut berkaitan dengan permutasi.

6.3.1. Pengertian Permutasi

Secara formal, permutasi adalah susunan teratur dari elemen-elemen yang berbeda dalam suatu himpunan. Jika terdapat n objek yang semuanya berbeda, maka banyaknya permutasi dari semua objek tersebut adalah:

$$P(n) = n!$$

Dengan $n!$ (dibaca: n faktorial) adalah hasil perkalian dari semua bilangan bulat positif dari 1 hingga n, yaitu:

$$\mathrm{n}! = \mathrm{n} \times (\mathrm{n}-1) \times (\mathrm{n}-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Contoh:

Jika terdapat 3 buku berbeda (A, B, C), maka banyak cara menyusun buku tersebut di rak adalah: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ cara}$. Susunan tersebut adalah

$$(A, B, C); (A, C, B); (B, A, C); (B, C, A); (C, A, B)$$

6.3.2. Permutasi dari Sebagian Elemen: $\boldsymbol{P(n, r)}$

Dalam banyak kasus, kita tidak perlu menyusun seluruh elemen, tetapi hanya sebagian saja. Jika kita memiliki n objek berbeda dan ingin menyusun r di antaranya, maka jumlah permutasi dihitung dengan

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh:

Berapa banyak susunan tiga huruf berbeda yang dapat dibentuk dari huruf-huruf A, B, C, D, E?

Penyelesaian:

$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60\ cara$

6.3.3. Permutasi dengan Elemen yang Sama (Permutasi Tak Terbedakan)

Jika beberapa elemen dalam himpunan tidak dapat dibedakan (identik), maka jumlah permutasi akan lebih kecil. Dalam kasus ini, rumus permutasi disesuaikan menjadi:

$$P = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_r!}$$

Dengan rincian:

n adalah jumlah total elemen;

$k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah jumlah elemen yang jenisnya sama.

Contoh:

Kata "STATISTIK" terdiri dari 10 huruf, dengan pengulangan: "S" sebanyak 3 kali; "T" sebanyak 3 kali; "I" sebanyak 2 kali; "A" dan "K" masing-masing 1 kali. Jumlah permutasi berbeda dari kata "STATISTIK" adalah:

$$P = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3628800}{6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{3628800}{72} = 50400\ cara$$

6.3.4. Permutasi Sirkuler (Melingkar)

Jika objek disusun membentuk lingkaran (misalnya kursi melingkar), maka satu susunan dapat diputar dan tetap dianggap sama. Dalam hal ini, jumlah permutasi menjadi:

$$P = (n - 1)!$$

Contoh:

Berapa banyak cara menyusun 6 orang duduk melingkar?

Jawab:

$P = (6 - 1)! = 5! = 120 \text{ cara}$

Latihan mandiri:

1. Dari 7 orang peserta, akan dipilih ketua, sekretaris, dan bendahara. Berapa banyak cara susunannya?
2. Berapa banyak susunan berbeda dari huruf-huruf dalam kata “BALAI”?
3. Hitung banyaknya permutasi dari huruf-huruf dalam kata “KOMBINATORIKA”.
4. Dalam sebuah perlombaan dengan 10 peserta, berapa banyak cara menentukan juara 1, 2, dan 3?
5. Dari 8 orang, berapa banyak cara menyusun mereka melingkar dalam satu meja bundar?
6. Dari huruf-huruf ABCA, berapa banyak susunan berbeda yang dapat dibentuk?

6.4. Kombinasi

Dalam dunia nyata, tidak semua permasalahan perhitungan melibatkan urutan. Kadang kita hanya tertarik pada pemilihan sejumlah objek tanpa memperhatikan susunannya. Misalnya, jika dari 10 siswa akan dipilih 3 orang untuk menjadi anggota tim, tanpa menentukan siapa yang menjadi ketua, sekretaris, dan bendahara, maka kita hanya tertarik pada siapa saja yang terpilih bukan urutannya.

Situasi seperti inilah yang disebut kombinasi. Kombinasi digunakan untuk menghitung banyaknya cara memilih sejumlah objek dari sekumpulan objek yang tersedia tanpa memperhatikan urutan pemilihannya.

Aplikasi kombinasi dalam kehidupan sehari-hari digunakan dalam pemilihan tim, panitia, atau kelompok tanpa peran. Kombinasi juga dapat menyelesaikan masalah dalam statistika dan probabilitas. Disamping itu, kombinasi juga sering digunakan dalam perhitungan kombinasi elemen dalam eksperimen ilmiah.

6.4.1. Pengertian Kombinasi

Secara formal, jika tersedia n objek berbeda, dan kita ingin memilih r objek dari kumpulan tersebut tanpa memperhatikan urutan, maka banyaknya cara yang dapat dilakukan dinyatakan dengan:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Contoh 1:

Berapa banyak cara memilih 3 siswa dari 10 siswa untuk mengikuti lomba?

Jawab:

$$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120\ cara$$

Contoh 2:

Berapa banyak cara memilih 5 kartu dari satu set kartu remi (52 kartu)?

Jawab:

$$C(52,5) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,(52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2.598.960\ cara$$

6.4.2. Sifat-sifat Kombinasi

Beberapa sifat kombinasi adalah sebagai berikut.

Simetri	$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-r}}$
Identitas dasar	$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}$
Jumlah kombinasi	$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$
Segitiga pascal	$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

6.4.3. Kombinasi dengan Repetisi

Dalam beberapa kasus, objek boleh dipilih lebih dari satu kali, disebut kombinasi dengan pengulangan (repetisi)**.** Banyaknya cara memilih r objek dari n jenis dengan pengulangan adalah:

$$C(n,r) = \binom{n+r+1}{r}$$

Contoh:

Berapa banyak cara memilih 3 buah dari 5 jenis permen (boleh sama jenisnya)?

Penyelesaian:

$$\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35\ cara$$

Latihan mandiri:

1. Berapa banyak cara memilih 6 pemain dari 12 siswa?
2. Dari 8 bunga berbeda, berapa banyak rangkaian tanpa urutan yang terdiri dari 3 bunga?

3. Sebuah rak buku berisi 10 buku. Berapa banyak cara memilih 4 buku untuk dibaca minggu ini?
4. Dalam satu kelas terdapat 10 siswa laki-laki dan 8 perempuan. Berapa cara memilih 5 siswa dengan minimal 2 perempuan?
5. Berapa banyak cara memilih 4 permen dari 6 jenis permen, jika permen boleh diambil lebih dari satu?

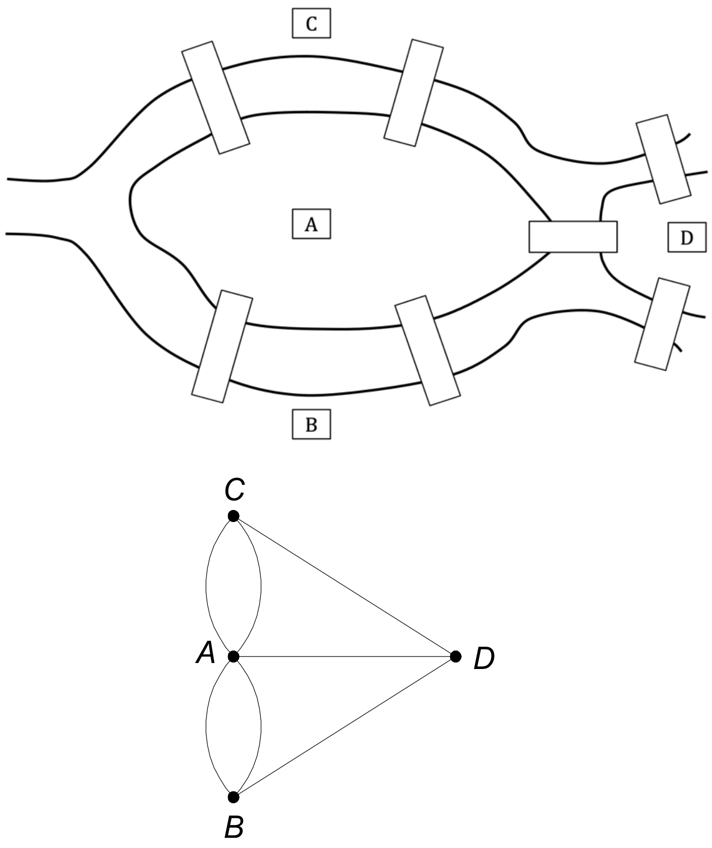
BAB 7
TEORI GRAF

Dunia di sekitar kita terdiri atas banyak entitas yang saling berinteraksi: manusia terhubung dalam jaringan sosial, kota-kota saling terhubung melalui jalan dan rute penerbangan, komputer-komputer membentuk jaringan komunikasi melalui internet, dan data digital tersimpan dalam struktur terhubung yang kompleks. Untuk memahami, memodelkan, dan menganalisis hubungan-hubungan tersebut, teori graf menjadi salah satu alat yang paling fundamental dan serbaguna dalam matematika diskrit.

Teori graf adalah cabang matematika yang mempelajari struktur relasional antara objek-objek, yang direpresentasikan sebagai simpul (*nodes/vertices*) dan hubungan antar objek sebagai sisi (*edges*). Konsep ini sederhana namun sangat kuat. Graf mampu memodelkan sistem yang sangat beragam, dari jaringan listrik dan aliran data, hingga struktur kimia dan hubungan sosial. Oleh karena itu, teori graf telah menjadi salah satu pilar dalam pengembangan ilmu komputer, teknik, ilmu data, hingga biologi dan ekonomi.

Sejarah teori graf bermula pada abad ke-18 ketika seorang matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler, mencoba memecahkan teka-teki jembatan Königsberg. Kota Königsberg saat itu dilintasi oleh sungai dan memiliki tujuh jembatan yang menghubungkan empat bagian kota. Tantangannya adalah: apakah mungkin berjalan melewati semua jembatan tepat satu kali dalam satu perjalanan? Euler memformalkan masalah tersebut dalam bentuk titik dan garis penghubung, yang menjadi cikal bakal konsep graf modern. Hasil pemikirannya pada tahun 1736 bukan hanya menyelesaikan teka-teki tersebut, tetapi juga melahirkan fondasi pertama dari teori graf, serta membuka jalan bagi perkembangan ilmu jaringan secara matematis. Graf yang

yang merepresentasikan jembatan Königsberg yaitu simpul (*vertex*) yang menyatakan daratan, dan sisi (*edge*) yang menyatakan jembatan.



Gambar 7.1. Jembatan Königsberg

Seiring dengan berkembangnya teknologi dan kebutuhan pemodelan sistem yang kompleks, teori graf tumbuh menjadi disiplin yang sangat luas. Kini, topik-topik dalam teori graf tidak hanya meliputi struktur graf dasar, tetapi juga mencakup algoritma traversal graf (BFS, DFS), graf berarah berbobot, pencarian jalur terpendek, pewarnan graf, hingga teori spektral graf dan graf planar.

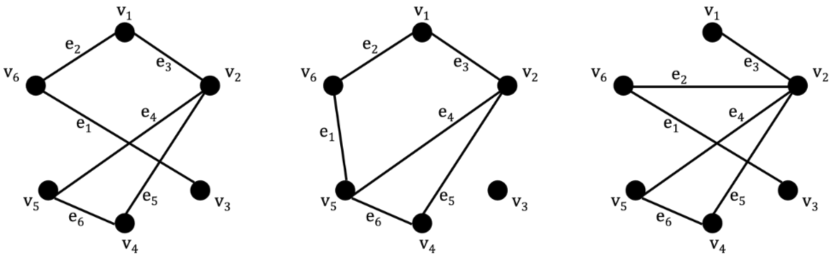
Dalam konteks matematika diskrit, pembelajaran teori graf menjadi penting, karena tidak hanya memperkenalkan konsep struktural dan logis, tetapi juga memperkuat kemampuan berpikir analitis dan algoritmis mahasiswa. Pemahaman terhadap teori graf juga menjadi dasar yang kuat dalam studi lanjutan seperti teori kompleksitas, teori jaringan, ilmu kriptografi, komputasi paralel, dan optimasi kombinatorik.

Tujuan dari bab ini adalah untuk memperkenalkan konsep-konsep dasar teori graf secara sistematis, lengkap dengan notasi, definisi, jenis-jenis graf, serta cara representasi dan aplikasinya. Bab ini juga akan memuat sejumlah contoh dan latihan soal yang bertujuan untuk memperkuat pemahaman dan memberikan gambaran konkret mengenai bagaimana graf digunakan dalam pemecahan masalah.

7.1. Definisi Graf

Secara formal, graf adalah struktur matematika yang digunakan untuk memodelkan hubungan antar objek. Objek-objek tersebut direpresentasikan sebagai simpul (*nodes/vertices*), dan hubungan di antara mereka direpresentasikan sebagai sisi (*edges/arcs*).

Suatu graf G terdiri dari 2 himpunan berhingga, yaitu himpunan simpul tidak kosong $\left(V(G)\right) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $\left(E(G)\right) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini: V, adalah himpunan simpul (*vertices)*, yaitu objek-objek yang dihubungkan. Sedangkan E adalah himpunan sisi (*edges*), yaitu pasangan berhingga dari simpul-simpul dalam V.

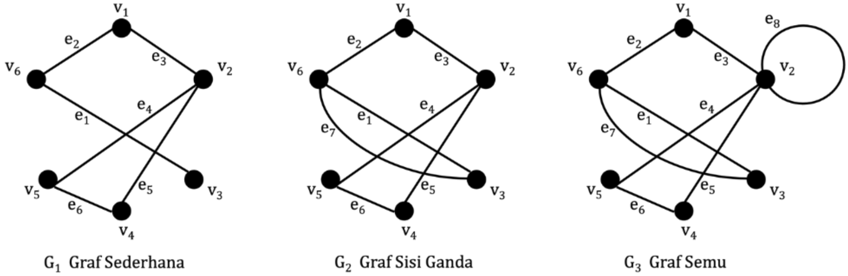


Gambar 7.2. Contoh graf

7.2. Jenis-jenis Graf

7.2.1. Graf Sederhana dan Tak Sederhana

Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf tanpa sisi ganda dan tanpa *loop* (sisi yang menghubungkan simpul dengan dirinya sendiri). Dengan kata lain, setiap pasangan simpul dihubungkan oleh paling banyak satu sisi. Tidak ada sisi dari suatu simpul yang menuju dirinya sendiri. Graf tak sederhana (*non-simple graph*) adalah graf yang memiliki salah satu atau kedua hal berikut: sisi ganda (*multiple edges*), yaitu terdapat lebih dari satu sisi antara sepasang simpul, atau sisi gelang (*loop*), yaitu terdapat sisi yang menghubungkan simpul ke dirinya sendiri. Graf tak sederhana terdiri atas dua jenis, yaitu graf ganda (graf yang mengandung sisi ganda) dan graf semu (graf yang mengandung gelang/*loop*).



Gambar 7.3. Graf Sederhana dan Tak Sederhana

7.2.2. Graf Berhingga dan Tak Berhingga

Dalam teori graf, jumlah simpul dan sisi menjadi ukuran penting dalam pengklasifikasian suatu graf. Berdasarkan banyaknya elemen dalam himpunan simpul maupun sisi, graf dikategorikan menjadi dua jenis utama, yaitu graf berhingga dan graf tak berhingga. Pemahaman terhadap dua kategori ini penting karena menentukan jenis pendekatan yang digunakan dalam analisis graf, baik secara teori maupun penerapannya dalam berbagai bidang.

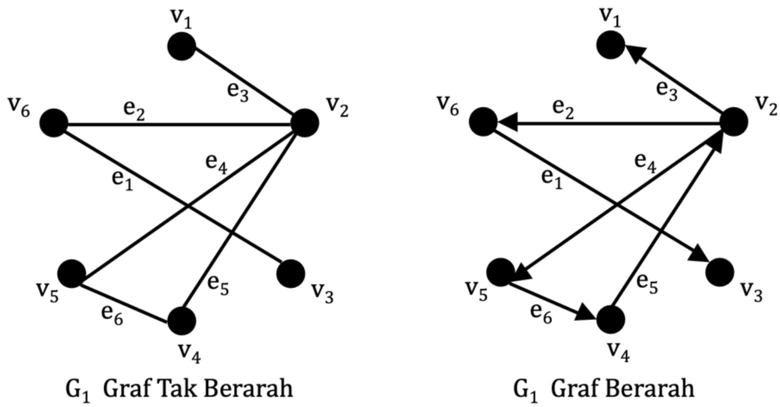
Graf berhingga adalah graf yang memiliki jumlah simpul (*vertex*) dan jumlah sisi (*edge*) terbatas dan dapat dihitung secara pasti. Sedangkan graf tak berhingga adalah graf yang memiliki jumlah simpul yang tak terhingga. Gambar 7.3 merupakan graf berhingga.

7.2.3. Graf Berarah dan Tak Berarah

Graf merupakan struktur matematika yang sangat fleksibel dan dapat dimodelkan dalam berbagai bentuk tergantung pada jenis relasi antar simpulnya. Salah satu klasifikasi penting dalam teori graf adalah berdasarkan arah dari sisi yang menghubungkan antar simpul. Berdasarkan hal ini, graf dibagi menjadi dua jenis utama, yaitu graf tak berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph*). Pemahaman terhadap kedua jenis graf ini sangat penting karena masing-masing memiliki karakteristik dan aplikasi yang berbeda.

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya memiliki arah yang ditunjukkan dari satu simpul ke simpul lainnya. Sisi ini disebut sebagai busur (*arc*) atau panah. Jika ada sisi dari v_i ke v_j, maka hal itu tidak serta merta berarti untuk arah sebaliknya. Dalam graf berarah, berlaku $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$. Untuk sisi (v_j, v_k), v_j disebut dengan simpul asal dan v_k disebut dengan simpul terminal.

Sementara itu, graf tak berarah adalah graf yang sisi penghubung dua simpulnya tidak memiliki arah tertentu. Artinya, sisi $\{v_i, v_j)$ menyatakan hubungan dua arah antara simpul v_i dan v_j.



Gambar 7.4. Graf Bearah dan Tak Berarah

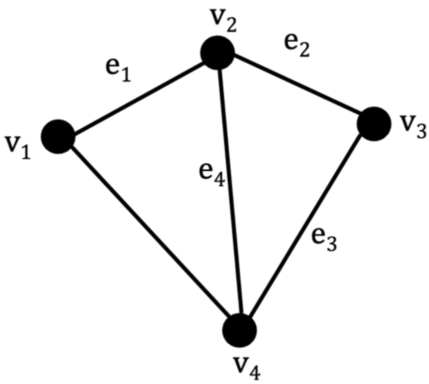
7.3. Terminologi Dasar pada Graf

Dalam teori graf, memahami istilah-istilah dasar (terminologi) sangat penting sebelum mempelajari struktur, jenis, dan sifat-sifat graf secara mendalam. Berikut ini adalah uraian lengkap dari terminologi yang sering digunakan.

7.3.1. Bertetangga (Adjacent)

Dalam teori graf, dua simpul dikatakan bertetangga atau *adjacent* jika terdapat sisi langsung yang menghubungkan keduanya. Konsep bertetangga ini menjadi dasar penting dalam memahami struktur dan keterhubungan graf.

Diberikan graf $G = (V, E)$, dua simpul $u, v \in V$ disebut bertetangga jika dan hanya jika $\{u, v\} \in E$. Notasi umum untuk bertetangga yaitu: jika u dan v bertetangga, maka ditulis $u \sim v$. Himpunan tetangga dari simpul v atau disebut *neighborhood*, yang dinotasikan: $\mathrm{N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}}$.



Gambar 7.5. Graf bertetangga

Pada gambar 7.5., diperoleh bahwa simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_4. Namun, simpul v_1 tidak bertetangga dengan v_3.

Latihan mandiri:

1. Diberikan graf G dengan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $E = \{\{1,2,\},\{2,3,\},\{3,4\},\{4,1\},\{2,4\}\}$
    a) Tentukan semua pasangan simpul yang bertetangga
    b) Gambar bentuk grafnya
2. Dalam graf berarah $V = \{P,Q,R,S\}$ dan $E = \{(P,Q),(Q,R),(R,S),(S,P),(P,R)\}$, tentukan tetangga masuk dan keluar dari simpul R.

7.3.2. Bersisian (Incident)

Dalam teori graf, dua objek utama yang selalu dikaji adalah simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*). Hubungan antara simpul dan sisi ini dikenal dengan istilah bersisian atau dalam bahasa Inggris disebut *incidence*. Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$, dikatakan e bersisian dengan simpul u dan simpul v. Pada gambar 7.5, sisi e_1 bersisian dengan simpul v_1 dan v_4, sedangkan sisi e_1 tidak bersisian dengan simpul v_3.

Latihan mandiri:

Diberikan graf berarah: $V = \{A, B, C, D\}$ dan $E = \{e_1 = (A, B), e_2 = (B, C), e_3 = (C, A)\}$. Tentukan semua pasangan simpul dan sisi yang bersisian serta gambar grafnya.

7.3.3. Derajat (Degree)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang terhubung dengan simpul tersebut.

1. Graf tak berarah: derajat simpul v, ditulis $\deg(v)$ adalah jumlah sisi yang melekat pada v.
2. Graf berarah: derajat masuk adalah jumlah sisi yang menuju ke simpul tersebut. Sedangkan, derajat keluar adalah jumlah sisi yang keluar dari simpul tersebut.

Pada graf berarah, $d_{in}(v)$= derajat masuk (*in-degree*) adalah jumlah sisi yang masuk ke simpul v. Sedangkan, $d_{out}(v)$= derajat keluar (*out-degree*) adalah jumlah sisi yang keluar dari simpul v dengan $d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$. Pada gambar 7.5., derajat simpul $v4$ adalah $\deg(v_4) = 3$.

Latihan mandiri

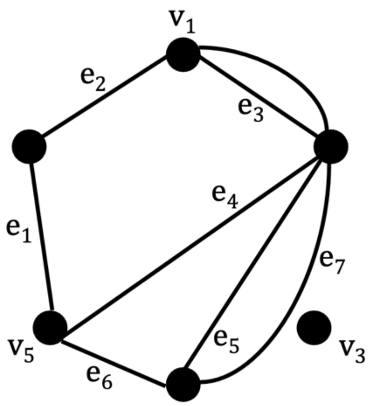
Tentukan seluruh derajat simpul graf pada gambar 7.3.

7.3.4. Simpul Terisolasi (Isolated Vertex)

Dalam teori graf, salah satu cara untuk memahami struktur dan sifat dari graf adalah dengan mengamati bagaimana simpul-simpul (*vertices*) terhubung satu sama lain melalui sisi (*edges*). Di antara berbagai jenis simpul yang dapat ditemukan dalam suatu graf, terdapat jenis khusus yang disebut simpul terisolasi (*isolated vertex*). Simpul ini memiliki karakteristik unik karena tidak memiliki hubungan (sisi) dengan simpul lainnya.

Simpul $v \in V$ pada graf $G = (V, E)$ disebut simpul terisolasi jika tidak ada satupun sisi yang bersisian dengannya. Artinya, tidak ada sisi $e \in E$ yang mengandung v. Karakteristik simpul terisolasi memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

a) Tidak memiliki tetangga – Tidak ada simpul lain yang terhubung dengannya.
b) Tidak berkontribusi terhadap keterhubungan graf – Keberadaan simpul terisolasi tidak mengubah jalur yang menghubungkan simpul-simpul lainnya.
c) Umumnya muncul pada graf tidak berarah – Namun juga bisa muncul pada graf berarah jika simpul tersebut tidak memiliki sisi masuk atau keluar.
d) Visualisasi – Saat graf digambar, simpul terisolasi akan terlihat berdiri sendiri tanpa garis yang menghubungkan ke mana pun.



Gambar 7.6. Graf dengan simpul terpencil v_3

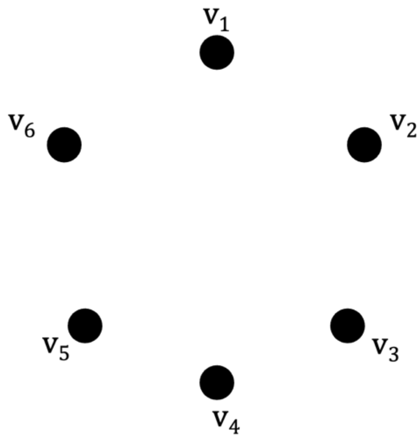
Latihan mandiri:

1. Diberikan graf dengan $V = \{A, B, C, D, E\}$ dan $E = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ tentukan semua simpul tersiolasi.
2. Dalam graf berarah dengan sisi $\mathrm{E} = \{(\mathrm{A}, \mathrm{B}), (\mathrm{C}, \mathrm{D})\}$, tentukan simpul yang tidak memiliki hubungan keluar atau masuk (yaitu terisolasi).

7.3.5. Graf Kosong (Null Graph atau Empty Graph)

Dalam teori graf, berbagai jenis graf diklasifikasikan berdasarkan sifat dan struktur hubungan antar simpul (*vertices*) dan sisi (*edges*) yang menghubungkan mereka. Salah satu jenis graf yang penting dalam pengantar teori graf adalah graf kosong. Meskipun sederhana, graf kosong memiliki peran penting dalam memahami konsep dasar keterhubungan, komponen, dan juga dalam membangun teori graf dari nol.

Graf kosong adalah graf yang memiliki simpul tetapi tidak memiliki sisi sama sekali. Secara formal, graf kosong G dapat didefinisikan sebagai $G = (V, E)$ dengan $v \neq \emptyset$ dan $E = \emptyset$.

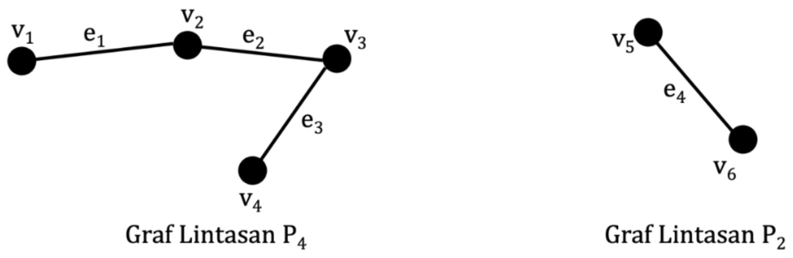


Gambar 7.7. Graf Kosong.

7.3.6. Lintasan (Path)

Dalam teori graf, lintasan (*path*) adalah urutan berhingga dari simpul-simpul yang saling terhubung oleh sisi, yang setiap sisi hanya dilalui sekali, dan tidak ada simpul yang berulang, kecuali dalam kasus siklus.

Secara formal, sebuah lintasan dari simpul v_1 ke simpul v_k dalam graf $G = (V, E)$ adalah urutan: $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$. Dengan $v_i \in V$ dan $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Panjang sebuah lintasan adalah jumlah sisi yang dilalui. Jika lintasan terdiri dari simpul $v_1, v_2, \dots, v_k$, maka panjang lintasan adalah $k - 1$.



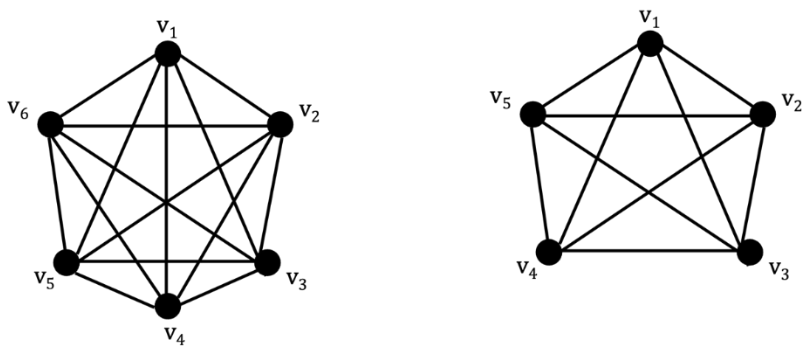
Gambar 7.8. Graf Lintasan

7.3.7. Graf Lengkap (Complete Graph)

Graf lengkap adalah jenis graf sederhana tak berarah yang setiap pasangan simpul berbeda saling terhubung langsung oleh tepat satu sisi. Artinya, dalam graf lengkap, semua simpul terhubung satu sama lain, sehingga tidak ada pasangan simpul yang tidak memiliki sisi penghubung. Dalam notasi graf, graf lengkap dengan n buah simpul dinotasikan dengan K_n.

Beberapa karakteristik penting dari graf lengkap K_n adalah:

1. Jumlah sisi setiap simpul terhubung ke semua simpul lainnya tanpa pengulangan dan tanpa arah, maka jumlah sisi dalam K_n adalah:
$$jumlah\ sisi = \frac{n(n-1)}{2}$$
2. Derajat setiap simpul terhubungan dengan $n-1$ simpul lainnya, sehingga derajat setiap simpul adalah $d(v) = n-1$.
3. Simetri dan keterhubungan.
    a) Graf lengkap adalah graf yang sangat simetris.
    b) Graf lengkap juga merupakan graf yang terhubung sempurna (*fully connected graph*).
    c) Merupakan graf planar hanya untuk $n \leq 4$, karena untuk $n \geq 5$ graf lengkap tidak dapat digambar di bidang tanpa sisi yang saling memotong.



Graf lengkap K_6 Graf lengkap K_5

Gambar 7.9. Graf Lengkap

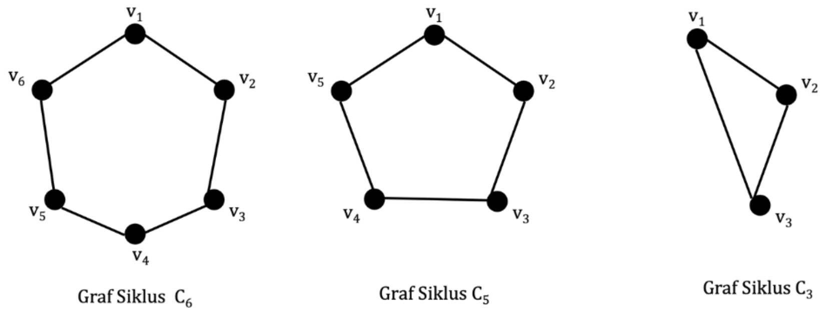
7.3.8. Siklus (cycle)

Dalam teori graf, siklus (*cycle*) merupakan salah satu struktur penting yang membantu dalam memahami keterhubungan, struktur topologi, dan karakteristik graf. Keberadaan atau ketiadaan siklus dalam graf juga menjadi dasar klasifikasi berbagai jenis graf, seperti graf pohon (yang tidak memiliki siklus) atau graf planar.

Siklus adalah lintasan tertutup sederhana dalam graf, yaitu suatu urutan simpul dan sisi yang dimulai dan berakhir pada simpul yang sama, tanpa mengunjungi simpul lainnya lebih dari satu kali (kecuali simpul awal/akhir). Secara formal, jika $v_1, v_2, \dots, v_k$ adalah simpul dalam graf, maka:

a) $v_1 = v_k$ simpul awal dan akhir sama.
b) Setiap pasangan berurutan (v_i, v_{i+1}) adalah sisi dalam graf.
c) Tidak ada simpul yang diulang, kecuali simpul awal=simpul akhir.

Siklus sepanjang n simpul biasanya disebut graf siklik dan dilambangkan dengan C_n.



Gambar 7.10. Graf Siklus

7.3.9. Graf Pohon (Tree)

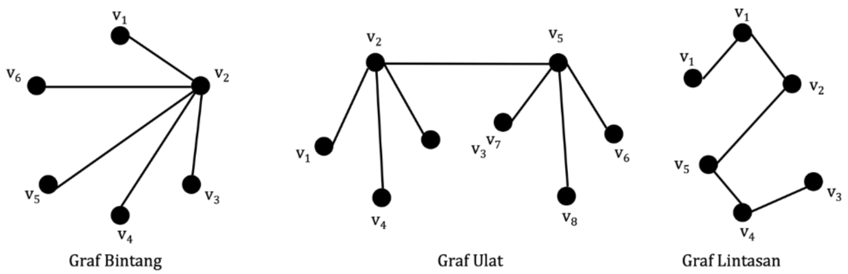
Dalam dunia matematika diskrit dan ilmu komputer, graf pohon adalah salah satu struktur graf yang paling mendasar dan penting. Konsep ini tidak hanya digunakan untuk representasi hierarki atau struktur organisasi, tetapi juga menjadi tulang punggung dari banyak algoritma, seperti pencarian (*searching*), pengurutan (*sorting*), pengkodean (*Huffman coding*), dan struktur data seperti *binary search tree*, *heap*, dan lain-lain.

Pohon adalah graf tak berarah yang terhubung dan tidak mengandung siklus. Dengan kata lain, pohon adalah graf $T = (V, E)$ dengan ketentuan: (1) Terhubung dan terdapat lintasan antara pasangan simpul, (2) Tidak terdapat siklus.

Adapun karakteristik dari graf pohon adalah sebagai berikut:

1. Jumlah sisi pohon adalah $n - 1$.
2. Terdapat satu dan hanya 1 lintasan antara setiap pasangan simpul.
3. Menambahkan satu sisi baru akan membentuk satu siklus (menjadi graf siklus).
4. Menghapus satu sisi dari pohon akan membuat graf menjadi tidak terhubung atau terdapat simpul terpencil.

Beberapa jenis graf pohon diantaranya, graf bintang, graf ulat, graf lintasan, dan lain sebagainya.



Gambar 7.10. Graf Pohon

7.4. Representasi Graf dalam Matriks

Dalam teori graf, representasi graf secara komputasional sangat penting untuk memudahkan proses analisis, pencarian jalur, atau implementasi algoritma. Salah satu cara paling umum dan sistematis untuk merepresentasikan graf adalah dalam bentuk matriks. Matriks memberikan struktur data yang teratur dan dapat langsung digunakan dalam pemrograman dan perhitungan matematis.

Terdapat beberapa jenis representasi matriks untuk graf, antara lain:

1. Matriks Ketetanggan (*Adjencency Matrix*)

Matriks untuk graf tak berarah dengan n simpul adalah matriks persegi A berukuran $n \times n$ dengan entri a_{ij}, yang menyatakan hubungan (sisi) antara simpul v_i dan v_j. Aturan pengisian matriks adalah sebagai berikut:

a) Jika terdapat sisi antara v_i dan v_j, maka $a_{ij} = 1$;
b) Jika tidak ada sisi, maka $a_{ij} = 0$;
c) Untuk graf tak berarah, $a_{ij} = a_{ji}$, sehingga matriks bersifat simetris;
d) Untuk graf berarah, $a_{ij} = 1$, jika terdapat busur dari v_i ke v_j dan matriks tidak simetris.

Contoh:

Graf tak berarah dengan simpul $V = \{A, B, C\}$ dan sisi $E = \{(A, B), (B, C)\}$, maka matriks ketetanggaannya adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Ketetanggaan Berbobot

Jika graf memiliki bobot pada sisi (*weighted graph*), maka:

a) $a_{ij} = w$, dengan w adalah bobot dari sisi antara simpul v_i dan v_j;

b) Jika tidak terhubung, maka $a_{ij} = 0$ atau tak hingga ∞.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Ketetanggaan Graf Berarah

Graf berarah dengan busur (i, j) diwakili oleh $a_{ij} = 1$, tetapi bisa jadi $a_{ij} = 0$ jika tidak ada busur balik.

Contoh:

Graf dengan $V = \{A, B, C\}$ dan $E = \{(A, B), (B, C)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Insidensi (*Incidence Matrix*)

Matriks insidensi adalah matriks M berukuran $n \times m$ dengan n adalah jumlah simpul dan m adalah jumlah sisi. Baris menunjukan simpul dan kolom menunjukan sisi. Pengisian matriks adalah sebagai berikut:

a) Untuk graf tak berarah: jika sisi e_k menghubungkan simpul v_i ke v_j maka $m_{ik} = m_{jk} = 1$;
b) Untuk graf berarah: jika sisi e_k adalah busur dari v_i ke v_j, maka $m_{ik} = -1$ dan $m_{jk} = 1$.

Contoh:
Graf tak berarah: $V = \{A, B, C\}, E = \{e_1 = (A, B), e_2 = (B, C)\}$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Latihan mandiri:

1. Diberikan graf $V = \{1,2,3\}$ dan sisi $\{(1,2), (2,3), (1,3)\}$, buatlah matriks ketetanggan dan insidensinya.
2. Untuk graf berarah $V = \{A, B, C\}$ dengan busur {(A,B),(C,B)}, buatlah matriks insidensi.
3. Tentukan apakah matriks berikut merupakan representasi dari graf berarah atau tak berarah.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.5 Lintasan dan Sirkuit

Dalam teori graf, salah satu konsep yang paling mendasar adalah lintasan (*path*) dan sirkuit (*circuit*). Keduanya digunakan untuk menggambarkan bagaimana simpul-simpul dalam sebuah graf dapat dihubungkan melalui sisi-sisi yang tersedia. Secara sederhana, lintasan adalah urutan simpul yang saling terhubung dengan sisi, sedangkan sirkuit adalah lintasan yang kembali ke simpul awal. Konsep ini menjadi fondasi dalam banyak pembahasan lanjutan, seperti graf Euler, graf Hamilton, maupun algoritma pencarian jalur terpendek.

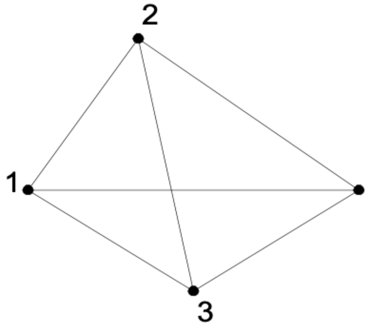
Secara formal, lintasan pada graf didefinisikan sebagai urutan simpul $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ sedemikian sehingga setiap pasangan simpul berturutan v_i dan v_{I+1} terhubung oleh suatu sisi dalam graf. Lintasan dapat ditulis sebagai

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

dengan sisi $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Jika tidak ada simpul yang diulang, maka lintasan tersebut disebut **lintasan sederhana**. Lintasan dikatakan **terhubung** jika simpul awal dan simpul akhir berbeda. Sedangkan jika simpul awal dan simpul akhir sama, maka lintasan tersebut disebut **sirkuit**. Dalam konteks ini, sirkuit juga dapat dipandang sebagai lintasan tertutup yang kembali ke titik asalnya.

Panjang lintasan didefinisikan sebagai jumlah sisi yang dilalui pada lintasan tersebut. Pada graf tak berbobot, panjang lintasan dihitung sebagai banyaknya sisi dalam urutan lintasan.

Sebagai contoh, diberikan gambar graf seperti telihat pada gambar G_1.



Gambar 7.11. Graf G_1

Namun, pada graf berbobot, panjang lintasan biasanya dihitung sebagai jumlah bobot sisi-sisi yang dilalui. Misalnya, jika suatu lintasan dari simpul A ke simpul D melalui simpul B dan C, memiliki bobot sisi $AB = 2AB = 2AB = 2$, $BC = 4BC = 4BC = 4$, dan $CD = 3CD = 3CD = 3$, maka panjang lintasan tersebut adalah $2 + 4 + 3 = 92 + 4 + 3 = 92 + 4 + 3 = 9$. Konsep panjang lintasan inilah yang kemudian menjadi dasar bagi berbagai algoritma pencarian jalur terpendek. Dengan demikian, lintasan dan sirkuit memberikan kerangka untuk memahami keterhubungan antar simpul dalam graf, sekaligus menjadi dasar dalam menjawab berbagai persoalan praktis yang melibatkan jalur atau rute, baik di bidang transportasi, komunikasi, maupun komputasi.

7.6. Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan dan sirkuit Euler merupakan konsep fundamental dalam teori graf yang berkaitan dengan kemampuan untuk menjelajahi seluruh sisi dalam graf tanpa mengulangi sisi. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada abad ke-18 saat memecahkan masalah Jembatan Königsberg.

Di kota Königsberg (sekarang Kaliningrad), terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan bagian-bagian kota yang terpisah oleh sungai. Pertanyaannya adalah: Dapatkah seseorang berjalan melalui kota dan melewati setiap jembatan tepat satu kali, lalu kembali ke titik awal? Euler memodelkan kota ini sebagai graf: pulau menjadi simpul (*vertex*), dan jembatan menjadi sisi (*edge*). Dari sinilah lahir konsep Lintasan dan Sirkuit Euler.

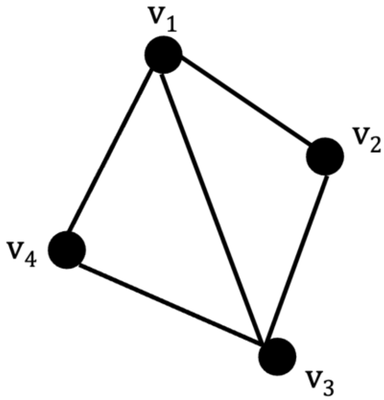
Lintasan Euler adalah lintasan dalam graf yang melewati setiap sisi tepat satu kali, tetapi tidak harus kembali ke simpul awal. Sirkuit Euler adalah lintasan Euler yang kembali ke simpul awal, sehingga melewati setiap sisi tepat satu kali serta titik awal dan titik akhir adalah sama. Graf tidak berarah memiliki lintasan Euler (graf semi-Euler) jika dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali.

Misalkan G adalah graf terhubung. G adalah sirkuit Euler jika dan hanya jika semua titik dalam G mempunyai derajat genap. Dengan kata lain: Jika ada titik dalam G yang berderajat ganjil, maka G bukan sirkuit Euler. Syarat eksistensi:

1. Untuk graf tak berarah
   a) Graf memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika graf tersebut terhubung dan setiap simpul memiliki derajat genap.
   b) Graf memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika graf tersebut terhubung dan memiliki tepat dua simpul berderajat ganjil.

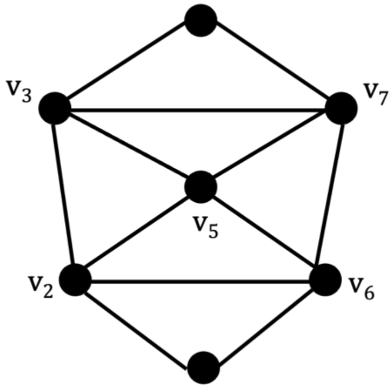
2. Untuk graf berarah
   a) Graf memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika graf terhubung dan untuk setiap simpul *in-degree* = *out-degree*.
   b) Graf memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika graf terhubung, terdapat satu simpul dengan *out-degree* = *in-degree* + 1, dan terdapat satu simpul dengan *in-degree* = *out-degree* + 1, sedangkan simpul lainnya memiliki *in-degree* = *out-degree*.

Contoh 1:
Misalkan graf berikut memiliki simpul v_1, v_2, v_3, v_4.



Karena terdapat dua simpul dengan derajat ganjil, maka graf ini memiliki lintasan Euler $v_3, v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ namun tidak memiliki sirkuit Euler.

Contoh 2:



Sirkuit Euler pada graf:
$v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_3, v_5, v_7, v_6, v_5, v_2, v_6, v_1$ dan memiliki lintasan Euler, sehingga graf ini disebut graf Euler.

Latihan mandiri:

1. Tentukan apakah graf berikut memiliki lintasan atau sirkuit Euler jika $V = \{A, B, C, D\}$ dan $E = \{AB, AC, BC, CD, DA\}$.

2. Buatlah graf sederhana yang memiliki sirkuit dan lintasan Euler.
3. Apakah graf bearah berikut memiliki sirkuit Euler? Untuk $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$.

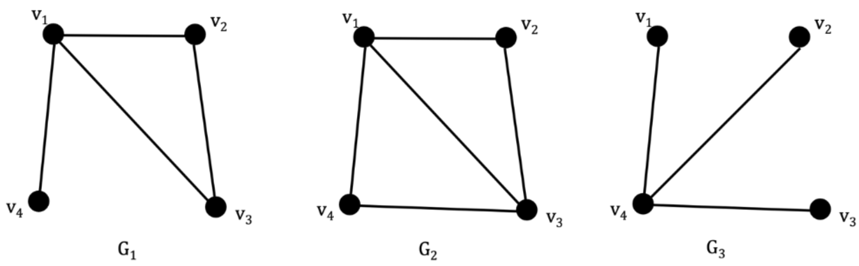
7.7. Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Dalam teori graf, lintasan dan sirkuit Hamilton merupakan konsep yang berfokus pada penjelajahan simpul (bukan sisi). Fokus ini berbeda dengan lintasan Euler yang berfokus pada kunjungan ke setiap sisi tepat satu kali.

Lintasan dan sirkuit Hamilton dinamai dari Sir William Rowan Hamilton, seorang matematikawan Irlandia yang memperkenalkan permainan Icosian Game di abad ke-19. Permainan ini merupakan sebuah teka-teki yang meminta pemain menemukan lintasan yang melalui setiap simpul dari *dodecahedron* tepat satu kali dan kembali ke titik awal.

Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Sirkuit Hamilton ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali. Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut graf semi-Hamilton.

Contoh:



Gambar 7.12. G_1 graf yang memiliki lintasan Hamilton v_3, v_2, v_1, v_4
G_2 graf yang memiliki sirkuit Hamilton v_1, v_2, v_3, v_4, v_1
G_3 graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

Latihan mandiri:

1. Diberikan graf G dengan simpul A, B, C, D, E dan sisi $\{AB, BC, CD, DE, EA, AC\}$. Apakah graf ini memiliki sirkuit Hamilton?
2. Gambarkan graf yang memiliki lintasan tetapi tidak memiliki sirkuit Hamilton.
3. Buat graf lengkap K_6 dan tentukan salah satu sirkuit Hamiltonnya.

7.8 Pencairan Lintasan Terpendek

Dalam teori graf, salah satu permasalahan yang paling banyak dipelajari adalah pencarian lintasan terpendek (*shortest path*). Lintasan terpendek didefinisikan sebagai lintasan dari suatu simpul awal ke simpul tujuan dengan panjang minimum. Panjang lintasan sendiri dapat dipahami sebagai ukuran yang menunjukkan seberapa "jauh" simpul awal dan simpul tujuan dihubungkan melalui sisi-sisi pada graf. Konsep "panjang" ini bisa diartikan berbeda tergantung pada jenis graf yang digunakan. Pada graf tak berbobot, panjang lintasan ditentukan berdasarkan jumlah sisi yang dilalui. Semakin sedikit sisi yang dilewati, semakin pendek lintasan tersebut. Pada graf berbobot, panjang lintasan ditentukan berdasarkan jumlah bobot dari sisi-sisi yang dilalui. Bobot pada sisi dapat merepresentasikan berbagai ukuran, seperti jarak, waktu tempuh, biaya transportasi, atau kapasitas tertentu.

Secara formal, jika $G = (V, E)$ adalah graf berbobot dengan fungsi bobot $w : E \to \mathbb{R}$, maka panjang lintasan $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ didefinisikan sebagai:

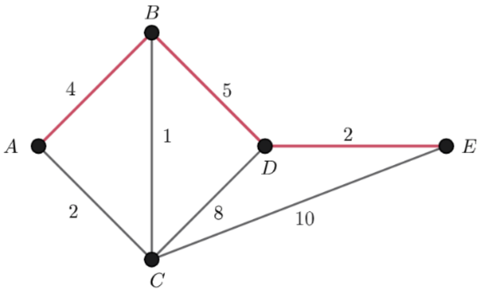
$$L(P) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

Lintasan terpendek antara dua simpul adalah lintasan P yang menghasilkan nilai $L(P)$ minimum di antara semua lintasan yang mungkin. Konsep ini bukan hanya teori abstrak, tetapi memiliki banyak penerapan dalam kehidupan nyata, misalnya pada sistem navigasi digital, optimisasi distribusi logistik, hingga *routing* data pada jaringan komputer.

Sebagai ilustrasi:

Misalkan graf G_2 memiliki simpul $\{A, B, C, D, E\}$ dengan bobot sisi sebagai berikut:

- $w(A, B) = 4$
- $w(A, C) = 2$
- $w(B, C) = 1$
- $w(B, D) = 5$
- $w(C, D) = 8$
- $w(C, E) = 10$
- $w(D, E) = 2$



Gambar 7.13. Graf G_2

Jika ingin mencari lintasan terpendek dari simpul A ke simpul E, beberapa kemungkinan lintasan adalah:
- $A \to C \to E$, dengan panjang 2 + 10 = 12
- $A \to C \to D \to E$, dengan panjang 2 + 8 + 2 = 12
- $A \to B \to D \to E$, dengan panjang 4 + 5 + 2 = 11
- $A \to B \to C \to D \to E$, dengan panjang 4 + 1 + 8 + 2 = 15

Maka, lintasan terpendek dari A ke E adalah $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E$ dengan panjang 11.

Salah satu algoritma yang paling sering digunakan untuk menentukan lintasan terpendek adalah Algoritma Dijkstra. Algoritma ini bekerja pada graf berbobot dengan syarat bobot sisi tidak negatif. Prinsip utamanya adalah memperluas lintasan secara bertahap dari simpul awal dengan selalu memilih simpul yang memiliki jarak sementara terkecil.

Misalkan sebuah graf berbobot dengan n buah simpul dinyatakan dengan matriks ketetanggaan $M = [m_{ij}]$, yang dalam hal ini,

$m_{ij} = \text{bobot sisi } (i, j)$

$m_{ii} = 0$

$m_{ij} = \infty$,   jika tidak ada sisi dari simpul i ke simpul j.

Selain matriks M, kita juga menggunakan tabel $S = [s_i]$ dan $D = [d_i]$, dengan ketentuan:

$s_i = 1$, jika simpul i termasuk ke dalam lintasan terpendek.

$s_i = 0$, jika simpul i tidak termasuk ke dalam lintasan terpendek.

d_i = panjang lintasan dari simpul awal a ke simpul i.

Mencari lintasan terpendek dari simpul a ke semua simpul lain.

Langkah 0 (inisialisasi):

- $s_i = 0$ dan $d_i = m_{ai}$, untuk $i = 1, \dots, n$.

Langkah 1:

- Isi $s_a = 1$ (karena simpul a adalah simpul asal lintasan terpendek, jadi sudah pasti terpilih).
- Isi $d_a = \infty$ (tidak ada lintasan terpendek dari simpul a ke a).

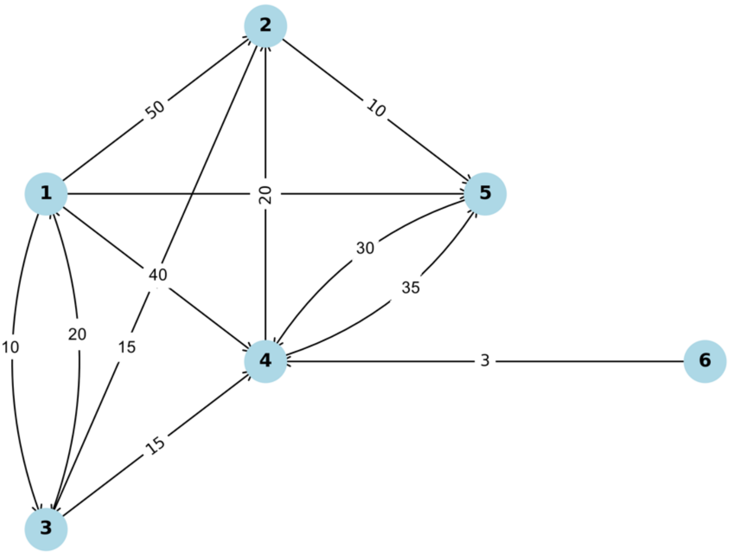
Langkah 2,3,...,n-1

- Cari j sedemikian, sehingga $s_j = 0$ dan d_j minimal.
- Isi s_j dengan 1.

- perbarui d_i, untuk i = 1, 2, 3, …, n dengan:

$$d_i \text{ (baru)} = min\{d_i(\text{lama}),\ d_j + m_{ji}\ \}$$

Sebagai contoh:Diberikan graf G_3 sebagai berikut:



Gambar 7.14. Graf G_3

Tentukan lintasan terpendek dari titik 1 seluruh titik lainnya.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan persoalan mencari lintasan terpendek dari simpul 1 ke semua simpul lain pada graf berbobot, terdapat beberapa langkah sistematis yang perlu dilakukan.

1. Identifikasi Simpul dan Sisi

Pertama-tama, tentukan himpunan simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*) pada graf yang diberikan. Misalnya, graf pada soal memiliki simpul $V = \{1,2,3,4,5,6\}$. Bobot sisi dinyatakan sebagai pasangan (i,j) dengan nilai tertentu, misalnya $(1,2) = 50, (1,3) = 10, (2,5) = 10,$ dan seterusnya. Informasi ini penting karena menjadi dasar perhitungan lintasan terpendek.

2. Bentuk Representasi Matriks Ketetanggaan

Agar lebih mudah melakukan perhitungan, graf dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks ketetanggaan berbobot $M = [m_{ij}]$. Aturan pengisian matriks adalah sebagai berikut:

- m_{ij} adalah bobot sisi dari simpul i ke simpul j.
- Jika $i = j$, maka $m_{ij} = 0$.
- Jika tidak ada sisi dari i ke j, maka $m_{ij} = \infty$.

Dengan aturan ini, setiap informasi sisi pada graf dapat dipindahkan menjadi bentuk matriks yang siap digunakan dalam algoritma.

3. Tentukan Simpul Asal

Karena yang ditanyakan adalah lintasan terpendek dari simpul 1 ke semua simpul lainnya, maka simpul asal yang dipilih adalah simpul $a = 1$. Seluruh perhitungan akan berpatokan dari simpul ini.

4. Gunakan Algoritma Dijkstra

Algoritma Dijkstra digunakan untuk mencari lintasan terpendek dari satu simpul asal ke semua simpul lain dalam graf berbobot dengan bobot non-negatif. Prosedur umum algoritma ini adalah:

- Inisialisasi jarak awal dari simpul asal ke simpul lain dengan nilai bobot langsung, atau ∞ jika tidak ada sisi.
- Tandai simpul asal sebagai simpul yang sudah diproses.
- Pilih simpul dengan jarak minimum yang belum diproses, lalu masukkan ke dalam himpunan simpul terpilih.
- Perbarui jarak ke simpul-simpul tetangga menggunakan aturan relaksasi:

$$d_{i(baru)} = min\{ d_{i(lama)}, d_j + m_{ji} \}$$

- Ulangi langkah tersebut sampai semua simpul telah diproses.

5. Representasi Graf dan Tabel Iterasi

Setelah langkah-langkah awal ditetapkan, gambarkan graf berbobot agar lebih jelas hubungan antar simpul. Kemudian, sajikan proses perhitungan dalam bentuk tabel iterasi, sehingga setiap langkah pembaruan jarak dapat dilacak secara sistematis.

Matriks Ketetanggaan:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 10 & 40 & 45 & \infty \\ \infty & 0 & 15 & \infty & 10 & \infty \\ 20 & \infty & 0 & 15 & \infty & \infty \\ \infty & 20 & \infty & 0 & 35 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 30 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

- Baris 1: dari simpul 1 ke simpul lain → ada ke 2 (50), ke 3 (10), ke 4 (40), ke 5 (45).
- Baris 2: dari simpul 2 → ke 3 (15), ke 5 (10).
- Baris 3: dari simpul 3 → ke 1 (20), ke 4 (15).
- Baris 4: dari simpul 4 → ke 2 (20), ke 5 (35).
- Baris 5: dari simpul 5 → ke 4 (30).
- Baris 6: dari simpul 6 → ke 4 (3).

Tabel Iterasi Algoritma Dijkstra:

Leleran	Simpul yang dipilih	Lintasan	S (1 2 3 4 5 6)	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Inisial	-	-	0 0 0 0 0 0	0	50 (1,2)	10 (1,3)	40 (1,4)	45 (1,5)	∞
1	1	1	1 0 0 0 0 0	∞	50 (1,2)	10 (1,3)	40 (1,4)	45 (1,5)	∞
2	3	1,3	1 0 1 0 0 0	∞	50 (1,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞
3	4	1,3,4	1 0 1 1 0 0	∞	45 (1,3,4,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞
4	2	1,3,4,2	1 1 1 1 0 0	∞	45 (1,3,4,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞
5	5	1,5	1 1 1 1 1 0	∞	45 (1,3,4,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞

Jadi, jarak terpendek yang dihasilkan:

- Jarak terpendek dari 1 ke 2 = 45 → lintasan $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$
- Jarak terpendek dari 1 ke 3 = 10 → lintasan $1 \rightarrow 3$
- Jarak terpendek dari 1 ke 4 = 25 → lintasan $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
- Jarak terpendek dari 1 ke 5 = 45 → lintasan $1 \rightarrow 5$
- Jarak terpendek dari 1 ke 6 = ∞ (tidak terhubung)

DAFTAR PUSTAKA

Biggs, N. L. (1993). *Algebraic graph theory* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Birkhoff, G., & Bartee, T. C. (1970). *Modern applied algebra* (2nd ed.). McGraw-Hill.

Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer.

Budi, I. (2012). *Matematika diskrit untuk informatika*. Informatika Bandung.

Clark, J., & Holton, D. A. (1991). *A first look at graph theory*. World Scientific.

Epp, S. S. (2011). *Discrete mathematics with applications* (4th ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.

Gallian, J. A. (2017). *Contemporary abstract algebra* (9th ed.). Cengage Learning.

Goodaire, E. G., & Parmenter, M. M. (2006). *Discrete mathematics with graph theory* (3rd ed.). Pearson Prentice Hall.

Grimaldi, R. P. (2004). *Discrete and combinatorial mathematics: An applied introduction* (5th ed.). Pearson.

Harary, F. (1969). *Graph theory*. Addison-Wesley.

Huda, N. (2013). *Matematika diskrit: Konsep dan aplikasinya dalam informatika*. Graha Ilmu.

Kolman, B., Busby, R. C., & Ross, S. (2008). *Discrete mathematical structures* (6th ed.). Pearson Education.

Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Pearson.

Liu, C. L. (1985). *Elements of discrete mathematics* (2nd ed.). McGraw-Hill.

Munir, R. (2004). *Matematika diskrit*. Informatika Bandung.

Rosen, K. H. (2000). *Elementary number theory and its applications* (4th ed.). Addison Wesley.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete mathematics and its applications* (7th ed.). McGraw-Hill Education.

Sedgewick, R., & Wayne, K. (2011). *Algorithms* (4th ed.). Addison-Wesley.

Siregar, M. T. (2017). *Teori graf dan aplikasinya*. Bumi Aksara.

Susanto, H. (2018). *Matematika diskrit* (Edisi Revisi). Penerbit Andi.

Tremblay, J. P., & Manohar, R. (1987). *Discrete mathematical structures with applications to computer science*. McGraw-Hill.

West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Prentice Hall.

BIODATA PENULIS

Ida Bagus Kade Puja Arimbawa K., S.Si., M.Si.
Dosen Program Studi Sistem Informasi
Fakultas Teknologi dan Ilmu Kesehatan Universitas Bali Dwipa

Penulis lahir di Tabanan pada 28 Desember 1989 dan saat ini menjabat sebagai dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi, Fakultas Teknologi dan Ilmu Kesehatan, Universitas Bali Dwipa. Dalam perjalanan akademiknya, penulis menyelesaikan pendidikan S1 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana, dengan konsentrasi pada Matematika Komputasi. Minat penulis dalam bidang matematika berlanjut hingga ke jenjang pendidikan S2, menempuh Program Studi Magister Matematika di Institut Teknologi Bandung, dengan spesialisasi pada kelompok keahlian Kombinatorika.

Kombinatorika, sebagai salah satu cabang penting dalam matematika, melibatkan studi tentang struktur diskrit, penghitungan, dan teori graf. Bidang ini sangat relevan dalam dunia komputasi dan sistem informasi, terutama dalam pengembangan algoritma, optimasi, dan aplikasi dalam data science. Keahlian penulis dalam kombinatorika mendukung perannya sebagai akademisi di Program Studi Sistem Informasi, di mana ia mengintegrasikan konsep matematika dalam pengajaran dan penelitian terkait pengembangan sistem informasi, big data, dan algoritma.

Di samping peran sebagai pengajar, penulis juga aktif dalam penelitian, khususnya dalam bidang matematika terapan dan teknologi informasi. Beberapa fokus penelitiannya meliputi aplikasi kombinatorika dalam pengoptimalan data, teori graf, serta penerapan algoritma dalam pengolahan data yang mendukung solusi berbasis teknologi di berbagai sektor. Dengan latar belakang akademis yang kuat dan pengalaman penelitian yang mendalam, penulis berkomitmen untuk terus mengembangkan inovasi dan kontribusi di bidang sistem informasi dan matematika komputasi, demi kemajuan pendidikan dan teknologi di Indonesia.

Ketut Queena Fredlina, S.Si., M.Si.
Dosen Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknologi Informasi dan Desain

Penulis lahir di Denpasar tanggal 31 Oktober 1990. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Informatika Fakultas Teknologi Informasi dan Desain, Universitas Primakara. Penulis memperoleh gelar Sarjana (S.Si.) dari Universitas Udayana, pada Jurusan Matematika, kemudian memperoleh gelar Magister (M.Si.) dari Institut Teknologi Bandung (ITB), dengan fokus pada bidang Matematika. Sebagai seorang dosen, penulis telah terlibat dalam pengajaran dan pembimbingan di Jurusan Teknik Informatika di Universitas Primakara. Ia memiliki pengalaman dalam menyampaikan materi yang kompleks dengan cara yang mudah dipahami oleh mahasiswa. Penulis memiliki minat khusus dalam penelitian yang berkaitan dengan penerapan konsep matematika dalam dunia teknologi. Ia telah menghasilkan beberapa karya ilmiah dan penelitian yang berkontribusi pada pemahaman dan perkembangan di bidang ini.

MATEMATIKA DISKRIT: TEORI DAN APLIKASINYA

BAB 1 : Logika Matematika
BAB 2 : Himpunan
BAB 3 : Matriks, Relasi dan Fungsi
BAB 4 : Induksi Matematika
BAB 5 : Bilangan Bulat
BAB 6 : Kombinatorial
BAB 7 : Teori Graf

FUTURE SCIENCE
IKAPI No. 348/JTI/2022
Jl. Terusan Surabaya Gang 1A No. 71 RT 002 rw 005, Kel.Sumbersari
Kec. Lowokwaru, Kota Malang, Provinsi Jawa Timur.
Website : www.futuresciencepress.com